অঙ্ক শেখার হাতেখড়ি

তৃতীয় ভাগ

বিদ্যাচর্চা কেন্দ্রের পাঠ সংকলন

Onko Shekhar Hathekhari – Tritio Bhag
by Sutanu Bhattacharya

First Edition: February 2019
Second Edition: February 2020
Third Edition (Revised): November 2022

Published by:
Sutanu Bhattacharya
63/114B Prince Anwar Shah Road
Rhineview Flat 5B, Kolkata 700045
Contact: (+91)9433064877/(+91) 9831943859
E-mail:sutnbh@gmail.com

Printed by:
Biswajyoti Sarkar
S. R. Printers
62/A Baithakkhana Road, Kolkata 700009, India
Contact: (+91) 9830168575

এই বইটা কেন

প্রাক্-প্রাথমিকের 3 থেকে 7 বছর বয়েসি শিশুদের জন্য ‘‘লেখাপড়ায় হাতেখড়ি’’ পুস্তিকার চারটি ধাপে 100 পর্যন্ত সংখ্যা ও সাধারণ যোগ বিয়োগ শেখানো হয়েছে। ইস্কুলের অষ্টম শ্রেণি পর্যন্ত অঙ্ক শেখার এরপরের পাঠগুলোকে (জ্যামিতি ও বীজগণিত ছাড়া) রাখা হল তিনটি ভাগে ‘‘অঙ্ক শেখার হাতেখড়ি’’ পুস্তিকায়। প্রথম ভাগে ইস্কুলের দ্বিতীয় ও তৃতীয় শ্রেণির, দ্বিতীয় ভাগে চতুর্থ ও পঞ্চম শ্রেণির, আর তৃতীয় ভাগে আছে ষষ্ঠ থেকে অষ্টম শ্রেণির পাঠ্য।

শিশুদের অঙ্ক শেখার বই, যা আজকাল বাজারে মেলে অথবা সরকার ছেপে বিতরণ করেন, তাদের আকার বিশাল আর আয়তনও বিপুল। প্রাথমিকের এক একটা শ্রেণির পাঠ্য বই-ই হল দু-তিনশ পাতার। বইগুলোতে একই কথাকে রঙিন ছবিতে নানাভাবে ঘুরিয়ে ফিরিয়ে দেখানোর ফলে শিশুমন বিভ্রান্ত তো হয়ই, আর সেইসঙ্গে বইয়ের বোঝার ভারে তার পিঠ নুয়ে পড়ে সেই শিশুকাল থেকেই। ইস্কুলে বছর ধরে পড়া হয় হয়তো অনেক, কিন্তু শেখা হয় কতটা? আমাদের প্রয়োজন শেখা—ভীতিজনক বই নয়, শিশুহাতে নাড়াচাড়ার উপযুক্ত সাধারণ আকৃতির পুস্তিকার মাপে স্বল্পমূল্যের বই, যেখানে সহজ করে বোঝানো থাকবে অঙ্কের পদ্ধতিগুলো আর অনুশীলনের জন্য থাকবে যথেষ্ট সংখ্যায় অঙ্ক।

রঙ-বেরঙে ছাপা মোটাসোটা দামি বইগুলির পাশে এমন পাতলা চটি বই দেখে বিশেষ শ্রদ্ধাভক্তি জাগবে না। তাহলেও এমন বই-ই আজ প্রয়োজন, যা শিশু-হাতে নাড়াচাড়ার উপযোগী, ও যা দিয়ে সাধারণ শিক্ষিত অভিভাবক বা স্থানীয় মানুষ ছেলেমেয়েদের অঙ্ক শেখায় সাহায্য করতে পারেন। আকার আয়তনে ছোট পুস্তিকা চাই—এই ভাবনা থেকে রঙীন ছবি, বড় বড় হরফ, ইত্যাদি বাহুল্য বর্জন করে, যা শেখার যতটুকু শেখার সেটুকুই রাখা হল।

বীরভূমের ফুলডাঙা বিদ্যাচর্চা কেন্দ্রে আদিবাসী শিশুদের লেখাপড়া শেখানোর অভিজ্ঞতার ফসল এই পুস্তিকা । আরও অনেক শিশুর লেখাপড়া শেখায় সহায়ক হতে পারলে এই পুস্তিকা সার্থক হয়। প্রথাগত ইস্কুলের প্রাতিষ্ঠানিক শিক্ষাব্যবস্থা ছাড়াও বিভিন্ন অঞ্চলে বহু সমাজসেবী সংস্থা ও স্থানীয় উদ্যোগে শিশু ও বয়স্ক শিক্ষার কাজটি সংঘটিত হতে দেখা যায়। এই উদ্যোগগুলির কাজে সহায়তার কথা মাথায় রেখেই এই বইটির প্রকাশনা। প্রকাশনায় সহায়তা করেছে সৌরলক্ষ্মী মেমোরিয়াল ট্রাস্ট। কিছু ভুলত্রুটি সংশোধন করে দিয়েছেন রাশিবিজ্ঞানী অধ্যাপক প্রদীপ সেনগুপ্ত (যাদবপুর বিশ্ববিদ্যালয়)।

ফেব্রুয়ারি ২০২২
ফুলডাঙা বিদ্যাচর্চা কেন্দ্র, বীরভূম

সুতনু ভট্টাচার্য

সূচিপত্র

পাঠ 1. ঐকিক নিয়ম — ধারণা ও ব্যবহার

1.1 ঐকিক নিয়মের সাহায্যে হিসাব করা

ঐকিক কথাটা আমরা পাই একক কথাটি থেকে, যার অর্থ একককে নিয়ে আসা। কোনও কিছুর নির্দিষ্ট পরিমাণের হিসাবটি জানা থাকলে আমরা তার থেকে বেশি বা কম পরিমাণের হিসাবটি বার করে নিতে পারি। এর জন্য প্রথমে ওই নির্দিষ্ট পরিমাণের হিসাব থেকে আগে একক পরিমাণের হিসাবটি বার করতে হয়। এই জন্য এই পদ্ধতিকে ঐকিক নিয়ম বলা হয়।

মনে রাখো: কোনও একটি নির্দিষ্ট পরিমাণের হিসাব থেকে অন্য কোনও পরিমাণের হিসাব বার করতে ঐকিক নিয়মের ব্যবহার হয়।

আগে দেখে নাও, ঐকিক নিয়ম ব্যবহার করতে হবে এমন প্রশ্নগুলি কেমন হয়।

1. এক ডজন, মানে 12টি পেনসিলের দাম 37 টাকা 20 পয়সা হলে 3টি পেনসিল কিনতে তোমার কত টাকা লাগবে?
2. একটি গাড়ি 3 ঘন্টায় 165 কিলোমিটার 750 মিটার যায়। গাড়িটি 5 ঘন্টায় কত দূর যাবে?
3. বাড়িতে চাল-ডাল যা আছে তাতে বাড়ির 8 জনের 12 দিন খাওয়া হবে। এবার আরও 4 জন অতিথি এসে বাড়িতে থাকলে কত দিন খাওয়া যাবে?
4. একটি কাজ 4 জনে মিলে 6 দিনে সম্পূর্ণ করে। আরও 2 জন এসে যোগ দিলে মোট 6 জনে মিলে কাজটি কত দিনে সম্পূর্ণ করবে?

লক্ষ করো, প্রথম দুটি প্রশ্নের ধরন আর শেষের দুটি প্রশ্নের ধরন আলাদা। প্রথমটিতে একটি পেনসিলের দামকে 12 দিয়ে **গুণ করে** আমরা পাই 12টি পেনসিলের দাম 37 টাকা 20 পয়সা। দ্বিতীয় প্রশ্নটিতে এক ঘন্টায় গাড়িটি যতদূর যায় তাকে 3 দিয়ে **গুণ করে** আমরা পাই 165 কিলোমিটার 750 মিটার। এবার দেখো শেষের দুটি প্রশ্ন। প্রথমটিতে বলা হয়েছে বাড়িতে যা চাল-ডাল আছে তা 8 জন মিলে **ভাগ করে** খেলে 12 দিন খাওয়া হয়। দ্বিতীয়টিতে বলা হয়েছে, কাজটি 4 জন মিলে **ভাগ করে** করলে 6 দিনে সম্পূর্ণ হয়।

এই দুই ধরনের প্রশ্নকে বিশেষভাবে আলাদা করে বুঝতে হবে। বুঝে নিতে হবে, যে পরিমাণের হিসাবটি দেওয়া আছে, তা গুণ করে, না ভাগ করে আসে। সেই অনুযায়ী ঐকিক নিয়ম পদ্ধতিটির প্রয়োগ ঠিক উল্টো হবে।

1.2 ঐকিক নিয়মে ভাগ করে গুণ ও গুণ করে ভাগ

যে পরিমাণের হিসাবটি দেওয়া থাকবে, তা যদি গুণ করে এসে থাকে তাহলে আমরা প্রথমে হিসাবটিকে ওই পরিমাণ দিয়ে ভাগ করে একক পরিমাণে আনব, ও তারপর যে পরিমাণের জন্য হিসাব করতে হবে তা দিয়ে গুণ করব। অন্যদিকে, যে পরিমাণের হিসাবটি দেওয়া হয়েছে, তা যেহেতু ভাগ করে পাওয়া, তাই একক পরিমাণের হিসাবটি পেতে আমাদের আগে গুণ করে নিতে হবে ও তারপর এই একক পরিমাণের হিসাবটিকে আরও অনেকে মিলে করলে কত হবে তা পাব ভাগ করে।

এবারে লক্ষ করো ঐকিক নিয়মের প্রয়োগ কীভাবে লেখা হয়। প্রথম ও দ্বিতীয় ধরনের প্রশ্নের দুটি করে উদাহরণ নিচে দেওয়া হল। এগুলির পার্থক্য বিশেষ করে বুঝে নাও।

প্রথম ধরনের প্রশ্ন – ভাগ করে গুণ করা

উদাহরণ 1. এক ডজন, মানে 12টি পেনসিলের দাম 37 টাকা 20 পয়সা হলে 3টি পেনসিল কিনতে তোমার কত টাকা লাগবে?

12টি পেনসিলের দাম	= ₹37.20
সুতরাং, 1টি পেনসিলের দাম	= ₹37.20÷12
	= ₹3.10
অতএব, 3টি পেনসিলের দাম	= ₹3.10 x3
	= ₹9.30

উত্তর: 3টি পেনসিল কিনতে আমার লাগবে 9 টাকা 30 পয়সা।

উদাহরণ 2. একটি গাড়ি 3 ঘন্টায় 165 কিলোমিটার 750 মিটার যায়। গাড়িটি 5 ঘন্টায় কত দূর যাবে?

গাড়িটি 3 ঘন্টায় যায়	=165.750 কি. মি.
সুতরাং, গাড়িটি 1 ঘন্টায় যায়	=165.750÷3 কি. মি.
	= 55.25 কি. মি.
অতএব, গাড়িটি 5 ঘন্টায় যাবে	= 55.25 x5 কি. মি.
	= 276.25 কি. মি.

উত্তর: গাড়িটি 5 ঘন্টায় যাবে 276.25 কি. মি.।

দ্বিতীয় ধরনের প্রশ্ন – গুণ করে ভাগ করা

উদাহরণ 3. বাড়িতে চাল-ডাল যা আছে তাতে বাড়ির 8 জনের 12 দিন খাওয়া হবে। এবার আরও 4 জন অতিথি এসে বাড়িতে থাকলে কত দিন খাওয়া যাবে?

8 জন মিলে ভাগ করে খেলে খাওয়া হয় = 12 দিন
সুতরাং, 1 জনই সবটা খেলে খাওয়া হবে = 12x8 দিন
= 96 দিন
অতএব, 12 জন মিলে খেলে খাওয়া হবে = 96÷12 দিন = 8 দিন
উত্তর: অতিথি নিয়ে 12 জন মিলে খাওয়া হবে 8 দিন ।

উদাহরণ 4. একটি কাজ 4 জনে মিলে 6 দিনে সম্পূর্ণ করে। আরও 2 জন এসে যোগ দিলে মোট 6 জনে মিলে কাজটি কত দিনে সম্পূর্ণ করবে?

4 জন মিলে ভাগ করে কাজটি সম্পূর্ণ করে = 6 দিন
সুতরাং, 1 জন কাজটি সম্পূর্ণ করবে = 6x4 দিন
= 24 দিন
অতএব, 6 জন মিলে ভাগ করে কাজটি সম্পূর্ণ করবে = 24÷6 দিন
= 4 দিন
উত্তর: 6 জন মিলে কাজটি সম্পূর্ণ করবে 4 দিনে ।

এরপর আমরা দেখব একটু জটিল প্রশ্ন, যেখানে দুই ধরনের প্রশ্নই মিলে থাকে, ও তাই সমাধান করতে ঐকিক নিয়ম প্রয়োগ করতে হয় দুটি ধাপে।

উদাহরণ 5. 4 জন মিলে 3 বিঘা জমি চাষের জন্য তৈরি করতে সময় নেয় 6 দিন।

a. 16 জন মিলে 8 বিঘা জমি তৈরি করতে কত দিন নেবে?
b. 4 বিঘা জমি 16 দিনে তৈরি করতে কত জন লাগবে?
c. 8 জন লোক 7 দিনে কত বিঘা জমি তৈরি করবে?

লক্ষ করো, প্রথম প্রশ্নটি হল কত দিন, দ্বিতীয়টি হল কত জন, আর তৃতীয়টি হল কত বিঘা। তাই সমাধান করার সময় ডান দিকে রাখতে হবে প্রথমটিতে দিনকে, দ্বিতীয়টিতে জনকে, ও তৃতীয়টিতে বিঘাকে, ও সেই অনুযায়ী অন্য দুটোকে এককে আনতে হবে। তিনটে রাশি থাকার জন্য একে বলে **ত্রৈরাশিক**। সমানুপাতের হিসাব দিয়ে ত্রৈরাশিকের সমাধান পরে করা আছে।

সমাধান a.

4 জন মিলে 3 বিঘা জমি তৈরি করতে সময় নেয় = 6 দিন

সুতরাং, 1 জনে 3 বিঘা জমি তৈরি করতে সময় নেবে = 6 x4 দিন

= 24 দিন

অতএব, 1 জনে 1 বিঘা জমি তৈরি করতে সময় নেবে = 24÷3 দিন

= 8 দিন

অতএব, 1 জনে 8 বিঘা জমি তৈরি করতে সময় নেবে = 8 x8 দিন

= 64 দিন

অতএব, 16 জনে 8 বিঘা তৈরি করতে সময় নেবে = 64÷16 দিন= 4 দিন

উত্তর: 16 জনে 8 বিঘা জমি তৈরি করতে সময় নেবে 4 দিন।

সমাধান b.

6 দিনে 3 বিঘা জমি তৈরি করতে লাগে = 4 জন

সুতরাং, 1 দিনে 3 বিঘা জমি তৈরি করতে লাগবে = 6 x4 জন

= 24 জন

অতএব, 1 দিনে 1 বিঘা জমি তৈরি করতে লাগবে = 24÷3 জন

= 8 জন

অতএব, 1 দিনে 4 বিঘা জমি তৈরি করতে লাগবে = 8 x4 জন

= 32 জন

অতএব, 16 দিনে 4 বিঘা জমি তৈরি করতে লাগবে = 32 ÷16 জন

= 2 জন

উত্তর: 16 দিনে 4 বিঘা জমি তৈরি করতে লাগবে 2 জন ।

সমাধান c.

4 জন মিলে 6 দিনে জমি তৈরি করে = 3 বিঘা

সুতরাং, 1 জনে 6 দিনে জমি তৈরি করবে = 3÷4 বিঘা

অতএব, 1 জনে 1 দিনে জমি তৈরি করবে = 3÷4÷6 বিঘা

= 3/24=1/8 বিঘা

অতএব, 8 জনে 1 দিনে জমি তৈরি করবে =(1/8) x8 বিঘা

=1 বিঘা

অতএব, 8 জনে 7 দিনে জমি তৈরি করবে =1 x7 বিঘা

= 7 বিঘা

উত্তর: 8 জনে 7 দিনে জমি তৈরি করবে 7 বিঘা ।

অনুশীলন 1.1

1. মনে মনে করে শূন্য স্থানে উত্তরটা লেখ

    a. 10টি কলার দাম 40 টাকা হলে 6টি কলার দাম হবে.... টাকা ।

    b. 5টি বালতিতে 35 লিটার জল ধরলে 7টি বালতিতে ধরবে....লিটার।

    c. 3টি ঝুড়িতে 39টি আম ধরলে 5টি ঝুড়িতে ধরবে....টি আম।

    d. 7টি ডিমের দাম 28 টাকা হলে 3টি ডিমের দাম হবে.... টাকা।

2. 7 দিনে তুমি 28 টাকা জমালে 13 দিনে কত টাকা জমাবে?

3. 3 জনকে 5 দিন কাজ করালে দিতে হয় 2550 টাকা। 7 জনকে 6 দিন কাজ করালে কত টাকা দিতে হবে?

4. একটি পুকুর কাটতে 180 জন লোকের লাগে 20 দিন। পুকুরটি 15 দিনে কাটতে কত জন লোক লাগবে?

5. এক ব্যক্তি সপ্তাহে 770 টাকা আয় করেন। 4620 টাকা আয় করতে তাঁর কত দিন লাগবে?

6. 60 জন লোকের যে খাদ্যে 20 দিন চলে, সেই খাদ্যে 40 জন লোকের কত দিন চলবে?

7. একটি ছাত্রাবাসে 400 জন ছাত্রের 40 দিনের খাবার আছে। 10 দিন পরে ওই ছাত্রাবাসে আরও 200 ছাত্র আসল। বাকি খাবারে আর কত দিন চলবে?

8. ছাত্রী আবাসে 18 জন ছাত্রীর 25 দিনের খাবার ছিল। কয়েক জন নতুন ছাত্রী আসায় খাবার 15 দিনে শেষ হয়ে গেল। কত জন নতুন ছাত্রী এসেছিল?

9. একটি কাজ 8 জন মিলে 21 দিনে করতে পারে। 14 জন মিলে কত দিনে ওই কাজটি করবে?

উত্তর 1.1

a.	24 টাকা	b.	35 লিটার	c.	65 টি	d.	12 টাকা
2.	52 টাকা	3.	7140 টাকা	4.	240 জন	5.	42 দিন
6.	30 দিন	7.	20 দিন	8.	12 জন	9.	12 দিন

1.3 দোকান বাজারে কেনাবেচার হিসাব মনে মনে করা

আমাদের সকলকেই দোকান বাজার করতে হয়। তাই বিভিন্ন জিনিসপত্রের দাম থেকে চটপট হিসাব করতে হয় বিভিন্ন পরিমাণের দাম কত হবে। প্রথমেই মনে রাখো, পরিমাণটি যদি এক কেজির বেশি হয় ও তাতে যদি গ্রামের অংশও থাকে, তাহলে আমরা কেজির পরিমাণ ও গ্রামের পরিমাণটির দাম আলাদা করে হিসেব করে যোগ করে নেব। কেজির পরিমাণটির দাম সহজেই গুণ করে পাওয়া যাবে। কিন্তু, এক কেজির দাম থেকে পরিমাণটির গ্রামের অংশের দাম আমাদের মনে মনে হিসাব করতে হবে অন্য ভাবে। যেমন, এক কেজি ডালের দাম 120 টাকা হলে 850 গ্রাম ডালের দাম কত হবে, অথবা 670 গ্রামের দাম বা 375 গ্রামের দাম কত হবে? এই হিসেব আমাদের মনে মনেই করে নিতে হবে। কীভাবে তা করা যেতে পারে, ঐকিক নিয়মকেই একটু অন্য ভাবে ব্যবহার করে, সেটাই আমরা এবার দেখব। দামের হিসেব করা যাবে বিভিন্ন ভাবে, বিভিন্ন দিক থেকে। কোনও নির্দিষ্ট পদ্ধতি নেই। কে কোন্ ভাবে করবে তা নির্ভর করবে তার কোন্টা করতে সুবিধা হচ্ছে তার ওপরে।

আমরা মনে মনে দামের হিসেবটা তিনভাবে করতে পারি — পরিমাণটিকে ভেঙ্গে নিয়ে দামগুলিকে যোগ বা বিয়োগ করে করে, অথবা পরিমাণটিকে দশমিক ভগ্নাংশ হিসাবে নিয়ে গুণ করে, অথবা পরিমাণটিকে সাধারণ ভগ্নাংশ হিসাবে নিয়ে গুণ করে। কোনটা করা সহজতর হবে তা নির্ভর করবে পরিমাণটি কেমন তার ওপরে, ও যার যেভাবে সুবিধা হয় সে সেইভাবেই করবে।

প্রথম পদ্ধতি: পরিমাণটিকে ভেঙ্গে নিয়ে দামগুলিকে যোগ বা বিয়োগ করা

উদাহরণ 1. এক কেজি ডালের দাম 120 টাকা হলে 850 গ্রাম ডালের দাম ।
প্রথমে দেখো 850 গ্রামের হিসেব বার করা। 850 গ্রাম মানে, 800+50 গ্রাম । সুতরাং, আমরা 800 গ্রামের ও 50 গ্রামের দামটা বার করে যোগ করে নেব।

এবারে, দেখো 800 গ্রামের ও 50 গ্রামের দাম কীভাবে বার করব। সহজ উপায় হল 100 গ্রামের দাম বার করে তাকে 8 দিয়ে গুণ করে 800 গ্রাম, ও 100 গ্রামের দামকে 2 দিয়ে ভাগ করে 50 গ্রামের দাম বার করা।

আমরা জানি 1 কেজি মানে 1000 গ্রাম। তাহলে 100 গ্রামের দাম পাব 1 কেজির দামকে দশ ভাগ করে, মানে দামের শেষের একটা শূন্য বাদ দিয়ে। এখানে তাহলে 100 গ্রামের দাম হবে 12 টাকা, আর 50 গ্রামের দাম হবে তার অর্দ্ধেক, মানে 6 টাকা। সুতরাং, 850 গ্রামের দাম হবে 8x12+6 = 96+6 = 102 টাকা।

বিয়োগ করেও হিসেবটা করা যায়। আমরা হিসেব করলাম 100 গ্রামের দাম 12 টাকা, ও 50 গ্রামের দাম 6 টাকা। তাহলে 100+50=150 গ্রামের দাম হবে 12+6 = 18 টাকা। আমরা জানি 850 গ্রাম হল 1 কেজি বা 1000 গ্রামের থেকে 150 (1000–850) গ্রাম কম। তাহলে 850 গ্রামের দাম হবে 1 কেজির দামের থেকে 18 টাকা কম, মানে 120–18 = 102 টাকা।

উদাহরণ 2. 670 = 600+70 গ্রামের দাম আমরা বার করতে পারব একই উপায়ে। 100 গ্রামের দামকে 6 দিয়ে গুণ করে পাব 600 গ্রামের দাম । কিন্তু এবার আমাদের 70 গ্রামের দাম বার করার জন্য আগে বার করতে হবে 10 গ্রামের দাম ও তাকে 7 গুণ করলে পাব 70 গ্রামের দাম।

100 গ্রামের দাম পেয়েছি 12 টাকা। তাহলে 10 গ্রামের দাম হবে 12 টাকাকে আবার 10 দিয়ে ভাগ করে 1.20 বা 1 টাকা 20 পয়সা। তাহলে 70 গ্রামের দাম হবে, সাত বারো চুরাশি, বা 8 টাকা 40 পয়সা। সুতরাং, 670 গ্রামের দাম হবে 6x12+8.40 = 72+8.40 = 80 টাকা 40 পয়সা।

উদাহরণ 3. 375=300+70+5 গ্রামের দাম এই ভাবে হিসেব করতে আমাদের আরও লাগবে আলাদা করে 5 গ্রামের দাম। 10 গ্রামের অর্দ্ধেক হল 5 গ্রাম, তাই এখানে 5 গ্রামের দাম হল 1.20÷2 = 60 পয়সা। সুতরাং, 375 গ্রামের দাম বার করতে আমরা ভেঙে ভেঙে 100 গ্রামের দামকে 3 দিয়ে গুণ করে 300 গ্রামের দাম, 10 গ্রামের দামকে 7 দিয়ে গুণ করে 70 গ্রামের দাম, ও 10 গ্রামের দামকে অর্দ্ধেক করে 5 গ্রামের দাম পাব, ও এইগুলোকে যোগ করে নিলেই 375 গ্রামের দাম পেয়ে যাব। এইভাবে, 375 গ্রামের দাম পেলাম 3x12+7x1.20+0.60 = 36+8.40+0.60 = 36+9 = 45 টাকা।

লক্ষ করো, 75 গ্রামের দাম এইভাবে ভেঙে 70+5 করে বার করা একটু জটিল। এর থেকে সহজ হবে 100 গ্রামের সাধারণ ভগ্নাংশ হিসাবে 75 গ্রামের দাম বার করা, যা আমরা এর পরে দেখব।

দ্বিতীয় পদ্ধতি: পরিমাণটিকে দশমিক ভগ্নাংশ হিসাবে নিয়ে গুণ করা

আমরা দশমিক পদ্ধতি থেকে জানি যে গ্রামকে কেজিতে প্রকাশ করা যায় দশমিক ব্যবহার করে। যেমন,

300 গ্রাম = 0.3 কেজি; 500 গ্রাম = 0.5 কেজি; 800 গ্রাম = 0.8 কেজি;
30 গ্রাম = 0.03 কেজি 50 গ্রাম = 0.05 কেজি; 80 গ্রাম = 0.08 কেজি;
3 গ্রাম = 0.003 কেজি 5 গ্রাম = 0.005 কেজি; 8 গ্রাম = 0.008 কেজি।

লক্ষ করতে হবে যে, পরিমাণটি শতক গ্রামের সংখ্যায় হলে তাকে কেজিতে লিখছি দশমিক বিন্দুর ঠিক পরের ঘরটিতে, দশক গ্রামের সংখ্যায় হলে লিখছি দশমিক বিন্দুর পরে দ্বিতীয় ঘরটিতে, আর একক গ্রামের সংখ্যায় হলে লিখছি দশমিক বিন্দুর পরে তৃতীয় ঘরটিতে।

এবারে কয়েকটি উদাহরণ দেখো —

উদাহরণ 4. এক কেজির দাম 120 টাকা হলে 300 গ্রামের দাম পাব 120-কে 3 দিয়ে গুণ করে 360 ও তারপর আমাদের দশমিক বিন্দু বসিয়ে নিতে হবে এমন ভাবে যাতে দশমিকের পরে **একটি ঘর** থাকে, অর্থাৎ, 36.0 = 36 টাকা।

একই ভাবে গুণ করে 30 গ্রামের দাম পাব 120-কে 3 দিয়ে গুণ করে 360 ও তারপর আমাদের দশমিক বিন্দু বসিয়ে নিতে হবে এমন ভাবে যাতে দশমিকের পরে **দুইটি ঘর** থাকে, অর্থাৎ, 3.60 = 3 টাকা 60 পয়সা।

একই ভাবে 3 গ্রামের দাম পাব এমন ভাবে দশমিক বিন্দু বসিয়ে যাতে দশমিকের পরে **তিনটি ঘর** থাকে, অর্থাৎ, 0.360 = 36 পয়সা।

মনে রাখতে হবে যে, দামে যদি পয়সার অংশ থাকে, তাহলে সহজ হবে টাকার অংশ ও পয়সার অংশ আলাদা করে হিসাব করে যোগ করে নেওয়া। পয়সার অংশ হিসাব করার সময় আমাদের তার জন্য দুইটি দশমিক বিন্দু হিসেবে ধরে নিতে হবে।

এক কেজির দাম 12 টাকা 50 পয়সা, অর্থাৎ, ₹12.50 হলে 300 গ্রামের দাম হবে, টাকার অংশে 12 x0.3=3.60 অর্থাৎ, 3 টাকা 60 পয়সা ও পয়সার অংশে 0.50 x0.3=0.150, অর্থাৎ, 15 পয়সা। এবার টাকার অংশ ও পয়সার অংশ যোগ করে পাই 3.75 = 3 টাকা 75 পয়সা ।

তৃতীয় পদ্ধতি: পরিমাণটিকে সাধারণ ভগ্নাংশ হিসাবে নিয়ে গুণ করে

উদাহরণ 5. কোনও কোনও পরিমাণের ক্ষেত্রে পরিমাণটিকে এক কেজির ভগ্নাংশ হিসাবে দেখে এক কেজির দামকেও ওই ভগ্নাংশে করে নিলে আমরা চট করে পরিমাণটির দাম পেয়ে যাই। যেমন, 250 গ্রাম হল এক কেজির চার ভাগের এক ভাগ। তাহলে, এক কেজির দাম 120 টাকা হলে 250 গ্রামের দাম হবে 120÷4 = 30 টাকা। এই ভাবে পাই, 500 গ্রাম হল এক কেজির দুই ভাগের এক ভাগ। তাহলে, এক কেজির দাম 120 টাকা হলে 500 গ্রামের দাম হবে 120÷2 = 60 টাকা ও একই ভাবে 750 গ্রাম মানে এক কেজির চার ভাগের তিন ভাগ বলে তার দাম (120÷4) x3 = 30 x3 = 90 টাকা।

একই পদ্ধতিতে আগে এক কেজির দামকে 10 দিয়ে ভাগ করে 100 গ্রামের দামে এনে আমরা 25 গ্রাম, 50 গ্রাম, 75 গ্রামের দাম হিসাব করতে পারব, চার ভাগের এক ভাগ, দুই ভাগের এক ভাগ, ও চার ভাগের তিন ভাগ করে নিয়ে।

অনুশীলন 1.2 মনে মনে দাম হিসাব করো

	পরিমাণ	এক কেজির দাম				
		a. ₹150	b. ₹60	c. ₹70	d. ₹20	e. ₹48
1.	10 গ্রা					
2.	100 গ্রা					
3.	25 গ্রা					
4.	50 গ্রা					
5.	500 গ্রা					
6.	600 গ্রা					
7.	800 গ্রা					
8.	750 গ্রা					
9.	2 কি 500 গ্রা					
10.	3 কি 750 গ্রা					

উত্তর 1.2

	a. ₹	b. ₹	c. ₹	d. ₹	e. ₹
1.	1.50	0.60	0.70	0.20	0.48
2.	15.00	6.00	7.00	2.00	4.80
3.	3.75	1.50	1.75	0.50	1.20
4.	7.50	3.00	3.50	1.00	2.40
5.	75.00	30.00	35.00	10.00	24.00
6.	90.00	36.00	42.00	12.00	28.80
7.	120.00	48.00	56.00	16.00	38.40
8.	112.50	45.00	52.50	15.00	36.00
9.	375.00	150.00	175.00	50.00	120.00
10.	562.50	225.00	262.50	75.00	180.00

পাঠ 2. গড় সংখ্যা — ধারণা ও ব্যবহার

2.1 এক জাতীয় বিভিন্ন রাশির গড় হিসাব করা

প্রথমে লক্ষ করো, এক জাতীয় রাশি বলতে আমরা কী বোঝাই, ও সেগুলি কখন পাই। মনে করো, তোমার বন্ধুদের বয়েস। সাত জন বন্ধুর এক একজনের বয়েস একটা কাগজে লিখলে তুমি সাতটি রাশি পাবে, যেগুলির প্রত্যেকটি হল বয়েস। আবার মনে করো পাঁচটি ঝুড়ির কোনটিতে কটা আম আছে গুনলে। এখানে পাঁচটি রাশি পাবে যেগুলির প্রত্যেকটি হল ঝুড়িতে আমের সংখ্যা।

এবারে মনে করো, কেউ যদি তোমাকে প্রশ্ন করে, তোমার বন্ধুদের এক একজনের বয়েস মোটামুটি কত, বা এক একটি ঝুড়িতে আন্দাজ কটা করে আম আছে, তাহলে তুমি কী উত্তর দেবে। এই উত্তর দিতে তোমাকে রাশিগুলির গড় হিসাব করে বলতে হবে।

মনে রাখো: কীভাবে এক জাতীয় একাধিক রাশি থেকে গড় বার করা হয়— এক জাতীয় একাধিক রাশির গড় = রাশিগুলির যোগফল ÷ রাশিগুলির সংখ্যা ।

উদাহরণ 1. তোমার 7 জন বন্ধুর বয়েস হল, 7 বছর, 12 বছর, 9 বছর, 8 বছর, 11 বছর, 12 বছর, ও 8 বছর। মোটের ওপর তোমার এক একজন বন্ধুর বয়েস কত?

রাশিগুলির যোগফল বা 7 জন বন্ধুর মোট বয়েস

$= 7+12+9+8+11+9+7 = 63$ বছর

সুতরাং, এদের বয়েসের গড় $= 63 \div 7 = 9$ বছর।

উত্তর: বন্ধুদের এক একজনের বয়েস মোটামুটি, বা গড় বয়েস হল 9 বছর।

লক্ষ করো, বন্ধুদের প্রত্যেকের বয়েস যদি 9 বছর করে হত, তাহলেও ওদের বয়েসের যোগফল (9+9+9+9+9+9+9) বা মোট বয়েস একই (63) হত।

উদাহরণ 2. পাঁচটি ঝুড়ির এক একটিতে আম রাখা আছে, 22টি, 25টি, 20টি, 23টি ও 20টি। এক একটি ঝুড়িতে মোটের ওপর কটি করে আম আছে?

রাশিগুলির যোগফল বা 5টি ঝুড়িতে মোট আমের সংখ্যা

$= 22+25+20+23+20 = 110$টি আম

সুতরাং, ঝুড়িতে আমের সংখ্যার গড় $= 110 \div 5 = 22$টি আম।

উত্তর: এক একটি ঝুড়িতে মোটামুটি আমের সংখ্যা, বা গড় আমের সংখ্যা হল 22টি।

লক্ষ করো, এখানেও, প্রত্যেকটি ঝুড়িতে 22টি করে আম রাখা থাকলেও মোট আমের সংখ্যা (22+22+22+22+22) বা 110-ই হত।

2.2 গড় সংখ্যা কখন ব্যবহার হয়

ওপরের উদাহরণ থেকে এটা বোঝাই যায় যে অনেকগুলি এক জাতীয় রাশিকে নির্দিষ্ট করে একটি সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করতে আমরা গড় ব্যবহার করি। এই গড় সংখ্যাটি দিয়ে আমরা রাশিগুলি সম্বন্ধে একটি আন্দাজ করতে পারি।

গড় হিসাব করার দ্বিতীয় একটি ব্যবহার হল, অনেকগুলি এক জাতীয় রাশি যদি দুইটি বা তারও বেশি দলের ক্ষেত্রে পাওয়া যায়, তাহলে আমরা গড় দিয়ে দলগুলির তুলনা করতে পারি।

মনে করো, তোমাকে প্রশ্ন করা হল, তোমার ক্লাসের ছেলেরা না মেয়েরা অঙ্ক পরীক্ষায় ভাল ফল করেছে। এর উত্তর কীভাবে দেবে? এর উত্তর দিতে তোমাকে অঙ্ক পরীক্ষায় ছেলেদের পাওয়া নম্বর আর মেয়েদের পাওয়া নম্বরের গড় করে দেখতে হবে গড়ে কারা বেশি পেয়েছে।

উদাহরণ 3. মনে করো অঙ্ক পরীক্ষায় 6 জন ছাত্র নম্বর পেয়েছে— 66, 87, 48, 75, 79, 83 ও 8 জন ছাত্রী নম্বর পেয়েছে—38, 92, 64, 74, 58, 88, 55, 58। কারা বেশি ভাল ফল করেছে, ছাত্ররা না ছাত্রীরা?

6 জন ছাত্রের মোট নম্বর = 66+87+48+75+79+83= 438 নম্বর ।
সুতরাং, ছাত্রদের গড় নম্বর = 438÷ 6 = 73 নম্বর।
8 জন ছাত্রীর মোট নম্বর = 38+92+64+74+58+88+55+59 = 528 নম্বর।
সুতরাং, ছাত্রীদের গড় নম্বর = 528÷ 8 = 66 নম্বর।

উত্তর: ছাত্রদের গড় নম্বর 73 ও ছাত্রীদের গড় নম্বর 66 । সুতরাং, ছাত্রদের গড় নম্বর ছাত্রীদের গড় নম্বর থেকে 7 বেশি বলে আমরা বলব ছাত্ররা তুলনায় বেশি ভাল ফল করেছে।

মনে রাখো:
এক জাতীয় একাধিক রাশির গড় = রাশিগুলির যোগফল ÷ রাশিগুলির সংখ্যা।
সুতরাং, রাশিগুলির যোগফল = রাশিগুলির গড় x রাশিগুলির সংখ্যা।

উদাহরণ 4. মনে করো একটি ক্লাসের 8 জন ছাত্রী পেয়েছে গড়ে 66 নম্বর ও 6 জন ছাত্র পেয়েছে গড়ে 73 নম্বর। সকলে মিলে গড়ে কত নম্বর পেয়েছে?

8 জন ছাত্রী পেয়েছে গড়ে 66 নম্বর,
সুতরাং, 8 জন ছাত্রী পেয়েছে মোট 66 x 8 নম্বর = 528 নম্বর।

6 জন ছাত্র পেয়েছে গড়ে 73 নম্বর
সুতরাং, 6 জন ছাত্র পেয়েছে মোট 73 x 6 নম্বর = 438 নম্বর।
অতএব, 8+6=14 জন ছাত্রছাত্রী পেয়েছে মোট 528+438= 966 নম্বর।
সুতরাং, 14 জন ছাত্রছাত্রীর গড় নম্বর = 966÷ 14 = 69 নম্বর।
উত্তর: সকল ছাত্রছাত্রীর গড় নম্বর 69 নম্বর।

মনে রাখো:

1. একাধিক দলের গড় থেকে সকল দলকে মিলে গড় বার করতে আগে এক একটি দলের রাশিগুলির যোগফল বার করে নিতে হবে। তারপর সবগুলি দলের রাশিগুলির মোট যোগফলকে সবগুলি দলের মোট রাশিসংখ্যা দিয়ে ভাগ করে আমরা সবকটি দল মিলিয়ে গড় পাবো।
2. সবকটি দলের মিলিত গড় ও তার মধ্যে একটি দলের গড় দেওয়া থাকলে আমরা অন্য দলটির গড় বার করতে পারব। এর জন্য সবকটি দলের মিলিত যোগফল থেকে বিয়োগ করে নিতে হবে যে দলটির গড় দেওয়া আছে তার যোগফলটি। তাহলে পাব অন্য দলটির যোগফল। একে ওই দলটির সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে আমরা এই দলটির গড় পাব।

উদাহরণ 5. একটি ক্লাসের 12 জন ছাত্রদের গড় বয়েস 12 বছর। 4 জন ছাত্র ক্লাস থেকে চলে গেল, যাদের গড় বয়েস ছিল 10 বছর। এখন ক্লাসের ছাত্রদের গড় বয়েস কত হবে?

12 জন ছাত্রদের গড় বয়েস 12 বছর,
সুতরাং, 12 জন ছাত্রদের মোট বয়েস =12 x 12= 144 বছর।
চলে গেল 4 জন ছাত্র যাদের গড় বয়েস ছিল 10 বছর,
সুতরাং, এই 4 জন ছাত্রদের মোট বয়েস =10 x 4= 40 বছর।
অতএব, বাকি (12–4) বা 8 জনের মোট বয়েস =144– 40= 104 বছর।
সুতরাং, বাকি 8 জনের গড় বয়েস =104÷8= 13 বছর।
উত্তর: এখন ক্লাসের ছাত্রদের গড় বয়েস 13 বছর।

অনুশীলন 2.1

1. গড় নির্ণয় করো:
   a. 24, 28, 64, 78, 23, 56
   b. 47 সেমি, 32 সেমি, 63 সেমি, 22 সেমি, 12 সেমি
   c. 12 কেজি, 23 কেজি, 18 কেজি, 11 কেজি, 42 কেজি, 68 কেজি

   d. 32 মিনিট, 27 মিনিট, 18 মিনিট, 56 মিনিট, 46 মিনিট, 25 মিনিট
   e. 32 লিটার, 21 লিটার, 62 লিটার, 75 লিটার
   f. 38 টাকা, 19 টাকা, 65 টাকা, 72 টাকা, 33 টাকা, 31 টাকা, 43 টাকা
2. 13টি সংখ্যার যোগফল 1924। এদের মধ্যে 7টি সংখ্যার গড় 172। অন্য 6টি সংখ্যার গড় কত? সবগুলি সংখ্যার গড় কত?
3. 7টি সংখ্যার যোগফল 401। এইগুলির প্রথম 3টি সংখ্যার গড় 56 ও শেষের 3টি সংখ্যার গড় 58। চতুর্থ সংখ্যাটি কত?
4. একটি মৌজার 5টি গ্রামের জনসংখ্যা হল, যথাক্রমে 1234, 968, 1102, 1056, 955। গ্রামগুলোর গড় জনসংখ্যা কত?
5. ক্লাসের পরীক্ষায় 8 জন ছাত্রছাত্রীর অঙ্কের নম্বর হল এই রকম — 76, 48, 56, 68, 84, 74, 50, 68। এরা গড়ে কত নম্বর পেয়েছে?
6. মলি আর ডলির গড় বয়েস 22 বছর। ডলি আর পলির গড় বয়েস 24 বছর। মলির বয়েস 21 বছর হলে ডলি আর পলির বয়েস কত?
7. শ্রাবণ মাসের প্রথম দশ দিন ফুলডাঙায় বৃষ্টিপাতের পরিমাণ দৈনিক গড়ে 53 মিমি, দ্বিতীয় দশ দিনে দৈনিক গড়ে 48 মিমি, ও শেষ দশ দিনে দৈনিক গড়ে 43 মিমি। ফুলডাঙায় শ্রাবণ মাসে দৈনিক গড় বৃষ্টিপাতের পরিমাণ কত?
8. তিনটি সন্তান ও পিতার গড় বয়েস 16 বছর। ওই তিনটি সন্তান ও মাতার গড় বয়েস 13 বছর। মাতার বয়েস 22 বছর হলে পিতার বয়েস কত?

উত্তর 2.1

1a.	45.5	1b.	35.2 সেমি	1c.	29 কেজি
1d.	34 মিনিট	1e.	47.5 লিটার	1f.	43 টাকা
2.	120, 148	3.	59	4.	1063
5.	65.5	6.	23 বছর, 25 বছর	7.	48 মিমি
8.	34 বছর				

পাঠ 3. শতকরায় হিসাব

3.1 শতকরার ধারণা

আমরা দশমিক ভগ্নাংশ শিখেছি দশ ভাগের কয়টি অংশ বা ভাগকে বোঝাতে। এগুলিকে দশাংশ বলেছি। একই ভাবে শতাংশ বলেছি একশ ভাগের কয়টি অংশ বা ভাগকে। দশাংশকে যেমন দশমিকে বলা হয়, তেমনই শতাংশকে শতকরা হিসাবে বলা হয়। অর্থাৎ, শতকরায় বলা মানে 100-তে কত বলা। দশাংশকে ও শতাংশকে দশমিক বিন্দু দিয়ে লেখার উদাহরণ দেখো—

$\frac{4}{10}$ = 4 দশাংশকে লেখা হয় 0.4, যাকে বলি দশমিক চার

$\frac{4}{100}$ = 4 শতাংশকে লেখা হয় 0.04 বা 4%, যাকে বলি শতকরা চার।

শতকরাকে সংক্ষেপে লেখা হয় % চিহ্নটি দিয়ে, যাকে ইংরেজিতে বলে পারসেন্ট। লক্ষ করো, দশাংশের সঙ্গে তুলনা করলে দেখি দশমিক বিন্দুর পরে একটি ঘর, আর শতকরার ক্ষেত্রে পরে দশমিক বিন্দুর পরে দুটি ঘর হয়। 4% কে আমরা 4 শতাংশও বলে থাকি। এবারে দেখো সাধারণ ভগ্নাংশকে কীভাবে দশমিক ও শতকরায় লেখা যায়।

সাধারণ ভগ্নাংশ	দশমিক	শতকরা
$\frac{15}{100}$	0.15	15%
$\frac{7}{100}$	0.07	7%
$\frac{84}{100}$	0.84	84%
$\frac{284}{100}$	2.84	2.84%
$\frac{5004}{100}$	50.04	50.04%

শতকরা হল এক ধরনের ভগ্নাংশ, যার হর হল 100। সুতরাং, যেকোনও সাধারণ ভগ্নাংশকে আমরা শতকরায় লিখতে পারি, হরটিকে 100 করে নিয়ে। আবার, যেকোনও শতকরাকে আমরা সাধারণ ভগ্নাংশে লিখতে পারি, তাকে 100 দিয়ে ভাগ করে।

উদাহরণ 1. সাধারণ ভগ্নাংশকে শতকরায় প্রকাশ করা

$$\frac{4}{5} = \frac{4x20}{5x20} = \frac{80}{100} = 0.8 = 8\%$$

উদাহরণ 2. শতকরাকে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ করা

$$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3x25}{4x25} = \frac{3}{4}$$

অনুশীলন 3.1

1. সাধারণ ভগ্নাংশকে শতকরায় প্রকাশ করো

   a. $\frac{5}{8}$ b. $\frac{3}{15}$ c. $\frac{6}{30}$ d. $\frac{15}{24}$

2. শতকরাকে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ করো

   a. 6% b. 24% c. 75% d. 11.28%

3. মান নির্ণয় করো

   a. 30 টাকার 6% b. 40 কেজির 12% c. 60 গ্রামের 30%

   d. 80 মিটারের 40%

   (সূত্র: ভগ্নাংশের গুণের নিয়ম ব্যবহার করো)

উত্তর 3.1

	a.	b.	c.	d.
1.	62.5%	20%	20%	62.5%
2.	$\frac{3}{50}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{282}{25}$
3.	₹ 1 p 80	4 কেজি 800 গ্রা	18 গ্রা	320 মিটার

3.2 শতকরায় বৃদ্ধির হিসাব করা

পৃথিবীতে কোনও কিছুই স্থির হয়ে থাকে না, হয় বৃদ্ধি পায় নয় ক্ষয় হয়। যেমন, ব্যাংকে টাকা রাখলে তা বেড়ে চলে; গ্রামে মানুষের জন্ম ও মৃত্যু বা নতুন মানুষ আসা বা চলে যাওয়ায় গ্রামের জনসংখ্যা বেড়ে চলে বা কমে যায়। সময়ের স্রোতে এই বৃদ্ধি বা ক্ষয় কী হারে হচ্ছে তার হিসাব আমরা শতকরা দিয়ে প্রকাশ করি। কীভাবে শতকরা দিয়ে বৃদ্ধির হিসাব করা যায় তা আমরা নিচের উদাহরণগুলি থেকে দেখব। ক্ষয়ের ক্ষেত্রে হিসাবটা ঠিক উল্টো করে করা হবে।

তিন ধরনের হিসাব করার উদাহরণ দেখব—

a. কতটা ছিল আর বৃদ্ধি পেয়ে কতটা হয়েছে, এই দুই পরিমাণ থেকে বের করব <u>শতকরা বৃদ্ধি কতটা</u> আর সময়ের হিসাবে <u>শতকরা বৃদ্ধির **হার**</u> কত;

b. কতটা ছিল আর শতকরা বৃদ্ধির হার কত, এই দুই থেকে বের করব কত সময় পরে বৃদ্ধি পেয়ে কতটা হবে;

c. শতকরা বৃদ্ধির হার ও বৃদ্ধি পেয়ে কত হয়েছে, এই দুই থেকে বের করব আগে কত ছিল।

এই হিসাবগুলির ক্ষেত্রে ঐকিক নিয়মের ব্যবহার লক্ষ করতে হবে। মনে রাখতে হবে, ঐকিক নিয়মে আমরা হিসাবকে 1-য়ে নিয়ে আসি, আর শতকরায় আমাদের হিসাবকে ঐকিক নিয়ম দিয়েই 100-তে নিয়ে আসতে হবে।

উদাহরণ 3. একটি গ্রামের জনসংখ্যা 2000 জন ছিল। 5 বছর পরে বৃদ্ধি পেয়ে হল 2300 জন। শতকরা কতটা বৃদ্ধি হল ও বছরে গড় বৃদ্ধির হার কত?

প্রথমেই বার করতে হবে বৃদ্ধির পরিমাণটা কত। আগে ছিল 2000 ও পরে হয়েছে 2300। সুতরাং বৃদ্ধির পরিমাণ 2300–2000 = 300। এবারে ঐকিক নিয়ম ব্যবহার করতে হবে।

2000 জনে 5 বছরে বৃদ্ধি পায়	300 জন
সুতরাং, 1 জনে 5 বছরে বৃদ্ধি পায়	300÷ 2000 = 3/20
সুতরাং, 100 জনে 5 বছরে বৃদ্ধি পায়	(3/20)x100= 15

উত্তর: গ্রামটির জনসংখ্যার 5 বছরে বৃদ্ধি হয়েছে শতকরা 15 জন বা 15%।

5 বছরে বৃদ্ধি শতকরা 15 হলে

প্রতি বছর গড়ে বৃদ্ধি হয় 15%÷ 5 = 3% বা শতকরা 3 জন।

মনে রাখো:

$$\text{শতকরা বৃদ্ধি} = \frac{(\text{এখন যা হয়েছে} - \text{আগে যা ছিল}) \times 100}{\text{আগে যা ছিল}}$$

$$\text{কোনও সময়ে শতকরা বৃদ্ধির হার} = \frac{(\text{এখন যা হয়েছে} - \text{আগে যা ছিল}) \times 100}{\text{আগে যা ছিল} \times \text{সময়}}$$

3.3 শতকরায় সুদের হিসাব করা

উদাহরণ 4. ব্যাংকে 400 টাকা জমা রাখলে। 8 মাস পরে দেখলে সেই টাকা বেড়ে হয়েছে 480 টাকা। শতকরা বৃদ্ধি কত হল ও মাসে গড় বৃদ্ধির হার কী?

400 টাকা 8 মাসে বাড়ে (480–400) বা 80 টাকা

সুতরাং, 1 টাকা 8 মাসে বাড়ে $\quad$ 80÷ 400 = 1/5 টাকা

সুতরাং, 100 টাকা 8 মাসে বাড়ে $\quad$ (1/5)x100= 20 টাকা

উত্তর: ব্যাংকে রাখা টাকা 8 মাসে বাড়ে 20% বা শতকরা 20 টাকা।

প্রতি মাসে গড়ে বাড়ে 20%÷ 8 = 2.5% বা শতকরা 2 টাকা 50 পয়সা।

মনে রাখো: ব্যাংকে জমা রাখা টাকা বাড়ে কারণ ব্যাংক জমা (আমানত) টাকার ওপর সুদ দেয়। জমা টাকার বৃদ্ধির হারকে, এখানে মাসিক 2.5%, সুদের হার বলে, আর যে টাকা জমা রাখা হয়েছিল তাকে বলে আসল।

উদাহরণ 5. তুমি ব্যাংকে 2500 টাকা জমা রাখলে। ব্যাংক প্রতি বছর 6% হারে সুদ দেয়। হিসাব করে বল 3 বছর পরে টাকা বেড়ে মোট কত হবে?

6% সুদ মানে 100 টাকা 1 বছরে বেড়ে হয় $\quad$ 106 টাকা

সুতরাং, 1 টাকা 1 বছরে বেড়ে হয় $\quad$ 106÷ 100 = 53/50 টাকা

2500 টাকা 1 বছরে বেড়ে হবে $\quad$ (53/50)x2500 = 2650 টাকা

সুতরাং, 2500 টাকায় 1 বছরে সুদ হয় $\quad$ 2650–2500 = 150 টাকা

2500 টাকায় 3 বছরে সুদ হয় $\quad$ 150 x3 = 450 টাকা

সুতরাং, 3 বছর পরে 2500 টাকা বেড়ে হবে 2500+450 = 2950 টাকা।

মনে রাখো:

$$\text{বৃদ্ধি বা সুদের পরিমাণ} = \frac{\text{সুদের হার} \times \text{আসল} \times \text{সময়}}{100}$$

মনে রাখো: এইভাবে বৃদ্ধিকে বলা হয় সাধারণ হার (ইংরেজিতে সিম্পল রেট)। এছাড়া আরেক ধরনের বৃদ্ধি হতে পারে যাকে বলা হয় চক্রবৃদ্ধি হার (ইংরেজিতে কম্পাউন্ড রেট), যা তোমরা পরে শিখবে।

উদাহরণ 6. ব্যাংকে সুদের হার 6% হলে কত টাকা আজ জমা দিলে 5 বছর পরে 240 টাকা সুদ পাবে?

সুদের হার 6% মানে

6 টাকা সুদ পাওয়া যায় 1 বছরে যখন আসল হল $\quad$ 100 টাকা

1 টাকা সুদ পাওয়া যায় 1 বছরে যখন আসল হল $\quad$ 100÷6 টাকা

240 টাকা সুদ পাওয়া যায় 1 বছরে যখন আসল হল $\quad$ (100÷ 6) x 240 টাকা

= 4000 টাকা

240 টাকা সুদ পাওয়া যায় 5 বছরে যখন আসল হল $\quad$ 4000÷5 টাকা

= 800 টাকা (উত্তর)।

মনে রাখো: আগে ছিল বা আসল = $\dfrac{100 \text{ x বৃদ্ধি বা সুদের পরিমান}}{\text{সুদের হার x সময়}}$

উদাহরণ 7. ফুলডাঙা গ্রামের লোকসংখ্যা শতকরা 4% বেড়ে হল 2080 জন। আগে তাহলে লোকসংখ্যা কত ছিল?

লোকসংখ্যার 4% বৃদ্ধির মানে

104 জন লোকসংখ্যা হয় 100 জন থেকে

সুতরাং, 1 জন লোকসংখ্যা হয় 100÷ 104 = 50/52 জন থেকে

2080 জন লোকসংখ্যা হয় (50/52)x2080 = 2000 জন থেকে।

উত্তর: আগে লোকসংখ্যা ছিল 2000 জন ।

অনুশীলন 3.2

1. রূপপুর গ্রামের লোকসংখ্যা 1980 সালে ছিল 2460 ও 1985 সালে ছিল 2706। 1980 থেকে 1985 সালের মধ্যে লোকসংখ্যার শতকরা বৃদ্ধি কত হয়েছিল? গড় বৃদ্ধির হার কত ছিল?
2. 2010 সালে তুমি ব্যাংকে 750 টাকা রেখেছিলে। 2016 সালে ওই টাকা বেড়ে হয়েছিল 930 টাকা। শতকরা বৃদ্ধি কত হয়েছিল? বছরে বৃদ্ধির হার কত ছিল?
3. 1080 লিটারের একটি জলের ট্যাংকে 270 লিটার জল আছে। পাইপ দিয়ে আরও জল ভরার ফলে মিনিটে ট্যাংকের 5% হারে জল বাড়ছে । কতক্ষণে ট্যাংকটি ভর্তি হবে?

[সমাধান কীভাবে হবে: আমাদের ট্যাংকটা ভরতে হবে। ট্যাংকটা 1080 লিটারের আর এখন জল আছে 270 লিটার। তাহলে আরও ভরতে হবে 810 লিটার। এবারে বলা আছে যে 1 মিনিটে জল ভরে ট্যাংকের 5% হারে, মানে 1080 লিটারের শতকরা 5 ভাগ করে। বা 1080x(5/100) বা 54 লিটার করে। তাহলে 810 লিটার ভরতে কত মিনিট লাগবে? ঐকিক নিয়ম ব্যবহার করো]

4. বাজারে সব্জির দাম বাড়ছে বছরে 5 শতাংশ হারে। এখন বেগুনের দাম 30 টাকা কেজি হলে 3 বছর পরে তার দাম কত হবে?

[সমাধান কীভাবে হবে: দাম বাড়ার হার হল বছরে 5 শতাংশ বা শতকরা 5। এখন দাম 30 টাকা। তাহলে প্রতি বছর দাম বাড়বে 30-এর 5 শতাংশ বা 30x(5/100) টাকা করে, বা 1.50 টাকা (1 টাকা 50 পয়সা) করে। তাহলে 3 বছরে দাম বাড়বে 4.50 টাকা বা 4 টাকা 50 পয়সা। তাহলে এখন দাম হবে, যা ছিল আর যা বাড়ল তার যোগফল।]

5. ফুলডাঙা গ্রামের লোকসংখ্যা প্রতি বছরে গড়ে 2.5 শতাংশ হারে বেড়ে 6 বছর পরে হয়েছে 2070। 6 বছর আগে লোকসংখ্যা কত ছিল?

[সমাধান কীভাবে হবে: এখানে ঐকিক নিয়ম ব্যবহার করতে হবে। আগে দেখো বৃদ্ধির হার হল বছরে 2.5 শতাংশ বা শতকরা 2.5। তাহলে গত 6 বছরে মোট বৃদ্ধি হয়েছে 6x2.5 শতাংশ বা 15 শতাংশ। এর অর্থ হল, 100 থাকলে বেড়ে হয় 115। এবার ঐকিক নিয়ম ব্যবহার করতে হবে। যদি 115 হয় 100 থাকলে, তাহলে 2070 হবে কত থাকলে? অর্থাৎ, (100/115)x2070।]

6. 4 বছর আগে তুমি ব্যাংকে কিছু টাকা রেখেছিলে বছরে 6% সুদে। এখন তোমার ব্যাংকে আছে 2480। তুমি 4 বছর আগে কত টাকা রেখেছিলে?

[সমাধান কীভাবে হবে: আগের 5 নম্বর অঙ্কটার মতো করে করো।]

উত্তর 3.2

1. 10%, 2%	2. 24%, 4%	3. 20 মিনিট
4. 34 টাকা 50 পয়সা	5. 1800 জন	6. 2000 টাকা

3.4 শতকরায় লাভ লোকসানের হিসাব করা

লাভ ও লোকসান (লোকসানকে ক্ষতি-ও বলে) বলতে কী বোঝায় তা আগে জেনে নিতে হবে। যা দিলাম বা খরচ করলাম ও তার ফলে যা পেলাম বা আয় হল এই দুই থেকে লাভ বা লোকসান হিসাব করে পাওয়া যায়। সহজ কথায়, যা দিলাম যদি তার থেকে বেশি ফেরত পাই তাহলে লাভ হয়, আর যদি কম ফেরত পাই তাহলে লোকসান হয়। দিলাম আর পেলাম, এই দুইয়ের বিয়োগফলটিই লাভ বা লোকসান, বা কোনওটাই হয়নি দেখাবে।

মনে রাখো:

যা দিলাম > যা পেলাম হলে লাভ হয়
যা দিলাম < যা পেলাম হলে লোকসান হয়
যা দিলাম = যা পেলাম হলে লাভ বা লোকসান কোনওটা হয় না।
যা দিলাম – যা পেলাম = (+) লাভ
যা দিলাম – যা পেলাম = (–) লোকসান, বা,
যা পেলাম – যা দিলাম = লোকসান

লাভ বা লোকসানকে সর্বদা বলা হয় যা দিলাম তার ওপরে।

লক্ষ করো, ব্যাংকে টাকা রেখে তুমি যে সুদ পাও, তা হল তোমার লাভ। এই লাভই হল বৃদ্ধির পরিমাণ, যাকে ব্যবসায় **মুনাফা** বলে। যা দিয়েছিলে বা খরচ

করেছিলে (ক্রয়মূল্য) তা হল তোমার **আসল বা বিনিয়োগ**। আর যা ফেরত পেলে বিক্রি করে তা হল বিক্রয়মূল্য।

এই লাভ-লোকসান দেখা যায় ব্যবসা-বাণিজ্যে। মনে করো তুমি খেল্‌না তৈরি করে বিক্রী করো। খেল্‌না তৈরি করতে তোমার কিছু টাকা খরচ হয়, যা তোমাকে দিতে হয়, আর সেই খেল্‌নাগুলো বিক্রী করে তুমি কিছু টাকা পাও। তাহলে আমরা হিসাব করতে পারি, এই কত দিলে আর কত পেলে থেকে তোমার লাভ হল না লেকসান হল।

ব্যবসা-বাণিজ্যের ক্ষেত্রে মনে রাখো:

লাভ = বিক্রয়মূল্য – ক্রয়মূল্য (বা তৈরি করার খরচ)

লোকসান = ক্রয়মূল্য (বা তৈরি করার খরচ) – বিক্রয়মূল্য

লাভ বা লোকসানের শতকরা হিসাব ক্রয়মূল্য বা খরচের ওপর করা হয়।

ব্যবসা বাণিজ্যের লাভকে মুনাফা বলা হয়।

উদাহরণ 8. এক কিলো চাল 30 টাকায় কিনে 36 টাকায় বিক্রি করলে শতকরা কত টাকা লাভ বা মুনাফা হয়? তাহলে 700 টাকার চাল কিনে বিক্রি করলে কত টাকা মুনাফা হবে?

আমরা জানি, লাভ = বিক্রয়মূল্য – ক্রয়মূল্য

এখানে 1 কিলোর বিক্রয়মূল্য 36 টাকা, আর ক্রয়মূল্য 30 টাকা

সুতরাং 1 কিলোতে লাভ = 36 – 30 = 6 টাকা ।

30 টাকায় লাভ হয় 6 টাকা

সুতরাং 1 টাকায় লাভ হয় 6÷30 = 1/5 টাকা

তাহলে 100 টাকায় লাভ হয় (1/5)x100 টাকা = 20 টাকা ।

সুতরাং শতকরা 20 টাকা মুনাফা বা 20% মুনাফা হয়।

এবারে দেখো, মুনাফার হার যদি 20% হয় তাহলে 700 টাকা বিনিয়োগ করলে কত মুনাফা হবে।

100 টাকায় মুনাফা হয় 20 টাকা

সুতরাং, 1 টাকায় মুনাফা হয় $\frac{20}{100}$ টাকা

তাহলে 700 টাকায় মুনাফা হবে $\frac{20}{100} \times 700$ টাকা = 140 টাকা ।

মনে রাখো: মুনাফা পরিমাণ = $\frac{\text{মুনাফার হার} \times \text{বিনিয়োগ}}{100}$

উদাহরণ 9. এক কিলো চাল 40 টাকায় কিনে 35 টাকায় বিক্রি করলে শতকরা কত টাকা লোকসান হয়? তাহলে 400 টাকার চাল কিনে বিক্রি করলে কত টাকা লোকসান হবে?

আমরা জানি, লোকসান = ক্রয়মূল্য – বিক্রয়মূল্য

এখানে 1 কিলোর বিক্রয়মূল্য 35 টাকা, আর ক্রয়মূল্য 40 টাকা

সুতরাং 1 কিলোতে লোকসান = 40 – 35 = 5 টাকা ।

40 টাকায় লোকসান হয় 5 টাকা

সুতরাং 1 টাকায় লোকসান হয় 5÷40 = 1/8 টাকা

তাহলে 100 টাকায় লোকসান হয় (1/8)x100 টাকা = 12.50 টাকা ।

সুতরাং শতকরা 12.50 টাকা লোকসান বা 12.5% লোকসান হয়।

তাহলে 400 টাকায় লোকসান হবে $= \dfrac{\text{লোকসানের হার x বিনিয়োগ}}{100}$

$= \dfrac{12.5 \times 400}{100}$ টাকা = 50 টাকা।

অনুশীলন 3.3 শতকরায় লাভ লোকসানের হিসাব করা

1. এক কেজি বেগুন 40 টাকায় কিনে 45 টাকায় বিক্রি করলে শতকরা কত টাকা লাভ হয়?

[সমাধান: 40 টাকায় 5 টাকা লাভ হলে 100 টাকায় কত লাভ হয়?]

2. একটি জামা 70 টাকায় কিনে 63 টাকায় বিক্রি করলে শতকরা কত টাকা লোকসান হয়?

[সমাধান: 70 টাকায় 7 টাকা লোকসান হলে 100 টাকায় কত লোকসান হয়?]

3. একটি জামার ক্রয়মূল্য 120 টাকা। কত টাকায় জামাটি বিক্রি করলে শতকরা 20 টাকা লাভ থাকে?

[সমাধান: এখানে ঐকিক নিয়ম ব্যবহার করতে হবে। শতকরা 20 টাকা লাভ রাখতে 100 টাকার জিনিস বিক্রি করতে হয় 120 টাকায়। সুতরাং শতকরা 20 টাকা লাভ রাখতে 1 টাকার জিনিস কত টাকায় বিক্রি করতে হয়, আর তাহলে 120 টাকার জিনিস কত টাকায় বিক্রি করতে হবে?]

4. একটি সাইকেল 4400 টাকায় বিক্রি করে 10% লাভ হল কেনা দামের ওপর । সাইকেলটি কত দামে কেনা হয়েছিল?

[সমাধান: লক্ষ করো যে (100+ শতকরা মুনাফার হার) টাকা হল বিক্রির মূল্য, যখন কেনা দাম (ক্রয়মূল্য) 100 টাকা। সুতরাং, শতকরা 10 টাকা লাভ রাখলে বিক্রয়মূল্য হয় 110 টাকা, যখন কেনা দাম হল 100 টাকা। এইখান থেকে ঐকিক নিয়ম ব্যবহার

করতে হবে। সুতরাং, শতকরা 10 টাকা লাভ রাখলে বিক্রয় মূল্য হয় 1 টাকা, যখন কেনা দাম হল (100/110) টাকা। তাহলে শতকরা 10 টাকা লাভ রেখে 4400 টাকায় বিক্রি করার মানে কেনা দাম ছিল (100/110)x4400 টাকা।]

5. 1900 টাকায় এক ঝুড়ি আম বিক্রি করে 5% লোকসান হল কেনা দামের ওপর। আমগুলি কত দামে কেনা হয়েছিল?

[সমাধান: আগের 4 নম্বর অঙ্কটার মতো করে করো। লক্ষ করো, 5% লোকসান মানে 95 টাকা বিক্রয়মূল্য যখন 100 টাকা হল ক্রয়মূল্য।]

6. কেনা দামের ওপর 12% মুনাফায় 3360 টাকার বিক্রি হলে মোট মুনাফা কত টাকা হয়?

[সমাধান: আগের 4 নম্বর অঙ্কটার মতো করে ক্রয়মূল্য বার করো ও বিক্রয়মূল্য 3360 টাকা থেকে বিয়োগ করে নাও।]

7. 4000 টাকা দিয়ে সব্জির দোকান দিয়ে 3 বছরে মুনাফা হল 1800 টাকা। বছরে মুনাফার হার কত?

[সমাধান কীভাবে হবে: আগে মোট মুনাফা শতকরা কত হল বার করো ও তারপর ৩ দিয়ে ভাগ করে বছরে মুনাফার হার বার করো।

8. শতকরা মুনাফার হার বছরে 8%। 5000 টাকা ব্যবসায় বিনিয়োগ করলে 4 বছরে কত টাকা মুনাফা হবে?

[সমাধান: বছরে মুনাফার হার শতকরা 8% মানে 100 টাকায় 1 বছরে মুনাফা হয় 8 টাকা। সুতরাং 5000 টাকায় 1 বছরের মুনাফা হবে 5000-এর 8% বা (5000x8/100) টাকা। তাহলে 4 বছরে কত মুনাফা হবে?]

9. শতকরা মুনাফার হার বছরে 20%। কত টাকা বিনিয়োগ করলে 5 বছরে মোট 3500 টাকা মুনাফা পাবে?

[সমাধান: আগে দেখো, 5 বছরে 3500 টাকা মুনাফা মানে 1 বছরে 700 টাকা মুনাফা। এবার ঐকিক নিয়ম লাগবে। বছরে 20% মুনাফার হার মানে 20 টাকা মুনাফা হয় 1 বছরে 100 টাকা বিনিয়োগ করলে। বার করো, তাহলে 700 টাকা মুনাফা হয় 1 বছরে কত টাকা বিনিয়োগ করলে।]

10. মুনাফার হার বছরে শতকরা 5% । 3000 টাকা বিনিয়োগ করলে কত বছরে 1500 টাকা মুনাফা পাবে?

[সমাধান: মুনাফার হার আর বিনিয়োগ থেকে বার করো 1 বছরে মুনাফা কত টাকা হয় । এবার ঐকিক নিয়ম দিয়ে বার করো 1500 টাকা মুনাফা করতে কত বছর লাগবে।]

উত্তর 3.3

1.	12.5%	2.	10%	3.	144	4.	4000	5.	2000
6.	360	7.	15%	8.	1600	9.	3500	10.	10

পাঠ 4.অনুপাত ও সমানুপাত

4.1 অনুপাতের ধারণা

রোজকার জীবনে আমাদের প্রায়ই একটার সাথে আরেকটার তুলনা করতে হয়। যেমন ধরো, তোমার 9টা বই আছে আর আমার আছে 3টা বই। এখানে আমরা বিয়োগ করে বলতে পারি কার কতটা বেশি আছে — তোমার 6টা বই বেশি আছে বা আমার 6টা বই কম আছে। কিন্তু, বিয়োগ করে তুলনা করা সর্বদা ঠিক হয় না। তাই আমরা তুলনা করতে অনুপাত (Ratio) ব্যবহার করি।

মনে করো, সিমেন্ট দিয়ে ঢালাই করার সময় 2 কিলো সিমেন্টের সাথে 4 কিলো বালি মেশাতে হয়। তাহলে কী বিয়োগ করে বলব, বালির পরিমাণ সর্বদা সিমেন্টের থেকে 2 কিলো বেশি হতে হয়। এটা বলা ভুল হবে। কারণ, এই হিসাবে 6 কিলো সিমেন্টের সাথে 12 কিলো বালি মেশাতে হবে। 2 কিলো বেশি মানে 8 কিলো বালি মেশালে হবে না। এটা হল অনুপাতের হিসাব। আমরা তুলনা করে বলছি সিমেন্টের দ্বিগুণ হবে বালির পরিমাণ। অনুপাত দিয়ে তুলনায় আমরা কোন্‌টা কতটা বেশি বা কম দেখছি না, দেখছি কোন্‌টা কত গুণ বেশি ।

সিমেন্ট ও বালির অনুপাতকে আমরা অনুপাত চিহ্ন (:) দিয়ে লিখব,

সিমেন্ট : বালি= $1 : 2$ বা $\frac{1}{2}$ অথবা উল্টো করে, বালি : সিমেন্ট = $2 : 1$ বা $\frac{2}{1}$

দুটি বা দুটির বেশি পরস্পর সম্পর্কিত একই ধরনের রাশির (পরিমাপের একক একই) তুলনা করা হয় তাদের অনুপাত দিয়ে। অনুপাত লেখা হয় দুটো রাশির মাঝে অনুপাত চিহ্ন (:) দিয়ে। অথবা, অনুপাতকে ভগ্নাংশ হিসাবে প্রকাশ করা যায় ভাগ চিহ্নের ওপরে একটা ও নিচে অন্যটা লিখে। অনুপাত একই ধরনের রাশির হয় বলে এই ভগ্নাংশের কোনও একক থাকে না। ভাগ করে যেটা পাই সেটা হল, একটা সংখ্যা অন্যটার কতগুণ বা উল্টে নিয়ে বললে কত ভাগ।

তুলনা করতে অনুপাত কীভাবে পাই তার উদাহরণ দেখো ।

এখন তোমার বয়েস 12 বছর আর দাদার বয়েস 18 বছর। তোমার দাদা ও তোমার বয়েসের অনুপাত কত? এই অনুপাতটার মানে কী?

দাদার বয়েস : তোমার বয়েস $= 18 : 12 \quad = 3 : 2$

বা, $\frac{\text{দাদার বয়েস}}{\text{তোমার বয়েস}} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

এর মানে হল, তোমার থেকে তোমার দাদার বয়েস এখন দেড় গুণ বেশি ।

এবার ভাবো এই প্রশ্নটা — তোমার বয়েস যখন দ্বিগুণ হয়ে 24 হবে তখন তোমার দাদার বয়েস কত হবে? এর উত্তর ওই দেড় গুণ অনুপাতের হিসাবে হবে না। তোমার বয়েস আরো 12 বছর বেড়ে যখন 24 হবে তখন তোমার দাদার বয়েসও ওই 12 বছরই বেড়ে 30 হবে। এখন বয়েসের অনুপাতটা পাল্টে যাবে। এটা হল **পরিবর্তনশীল অনুপাতের** উদাহরণ। তাই কোন **স্থির অনুপাত** এখানে পাওয়া যায় না, যা দিয়ে সর্বদা তুলনা করা যাবে। আসলে এখানে তোমার ও তোমার দাদার বয়েস পরস্পরের সাথে সম্পর্কিত নয়। এরা সময়ের সাথে সম্পর্কিত।

স্থির অনুপাতের উদাহরণ আগেই দেওয়া হয়েছে, সিমেন্ট দিয়ে ঢালাই করার সময় সিমেন্ট ও বালির অনুপাত। এই অনুপাতটা স্থির কারণ মিশ্রণে বালি বাড়ালে (বা কমালে) ওই অনুপাতে সিমেন্টও বাড়াতে (বা কমাতে) হবে। আর এই অনুপাতটার হিসেব করেই আমরা বলে দিতে পারব, কোনো পরিমাণ মিশ্রণে কতটা সিমেন্ট আর কতটা বালি থাকার কথা। ধরা যাক, ঢালাই করতে 2 ভাগ (বালতি) সিমেন্টের সাথে 5 ভাগ (বালতি) বালি মেশাতে হয়। তোমার দরকার 35 বালতি ঢালাইয়ের মিশ্রণ। কত বালতি সিমেন্ট আর কত বালতি বালি মেশাবে? উত্তর হল, 2:5 অনুপাতে 10 বালতি সিমেন্ট আর 25 বালতি বালি।

পূর্বপদ ও উত্তরপদ : দুইটি রাশির অনুপাত চিহ্ন দিয়ে লেখা হলে প্রথম সংখ্যাটাকে বলে পূর্বপদ ও পরের সংখ্যাটাকে বলে উত্তরপদ।

মনে রেখো, অনুপাত লেখার সময় কোন্‌টা পূর্বপদ আর কোন্‌টা উত্তরপদ গুলিয়ে ফেললে কিন্তু অনুপাত লেখাটা ভুল হয়ে যাবে। ওপরের উদাহরণে দেখো, বলা হয়েছে দাদা আর তোমার বয়েসের অনুপাত লিখতে। তাই আমরা লিখেছি 18 : 12 । উল্টোটা, মানে 12 : 18 লিখিনি। ওটা লিখতাম, যদি বলা হত, তোমার ও দাদার বয়েসের অনুপাত লেখো।

সমতুল অনুপাত ও অনুপাতের লঘিষ্ঠ আকার : অনুপাতকে ভগ্নাংশ হিসাবে প্রকাশ করা যায়, পূর্বপদকে লব ও উত্তরপদকে হর ধরে। ভগ্নাংশের লব ও হরকে শূন্য ছাড়া একই সংখ্যা দিয়ে গুণ বা ভাগ করলে ভগ্নাংশের মানের কোনও পরিবর্তন হয় না। একইভাবে, অনুপাতেও পূর্বপদ ও উত্তরপদকে শূন্য ছাড়া একই সংখ্যা দিয়ে গুণ বা ভাগ করলে অনুপাতের মানের কোনও পরিবর্তন হয় না। এইভাবে যে অনুপাতগুলো পাব, সেগুলোকে বলা হবে সমতুল অনুপাত। এগুলোর মধ্যে ভগ্নাংশ হিসাবে লেখা অনুপাতগুলোর সবচেয়ে ছোট ভগ্নাংশটাকে বলা হবে সমতুল অনুপাতগুলোর লঘিষ্ঠ অনুপাত।

ওপরের উদাহরণটা দেখো। 18 : 12 অনুপাতটার পূর্বপদ ও উত্তরপদকে 2 দিয়ে ভাগ করে পাই 9 : 6, আবার 3 দিয়ে ভাগ করে পাই 3 : 2 । সুতরাং, 18 : 12, 9 : 6, 3 : 2, এগুলো হল সমতুল অনুপাত আর 3 : 2 হল অনুপাতের লঘিষ্ঠ আকার।

মনে রাখো:
আমরা যে কোনও অনুপাতের অসংখ্য সমতুল অনুপাত পেতে পারি, শূন্য ছাড়া বিভিন্ন সংখ্যা নিয়ে এক এক বারে পূর্বপদ আর উত্তরপদকে গুণ করে।
অনুপাতের রাশি দুটোকে তাদের গ.সা.গু. দিয়ে ভাগে করলে আমরা অনুপাতকে লঘিষ্ঠ আকারে পাই।

4.2 বিভিন্ন ধরনের অনুপাতের নাম

সরল অনুপাত : মাত্র দুটো রাশি নিয়ে অনুপাতকে সরল অনুপাত বলে। আমরা পরে শিখব, তিন বা তারও বেশি রাশি নিয়ে অনুপাত হতে পারে।

লঘু অনুপাত ও গুরু অনুপাত : সরল অনুপাতের পূর্বপদ উত্তরপদের থেকে ছোট হলে তাকে লঘু অনুপাত বলা হয়, আর পূর্বপদ উত্তরপদের থেকে বড় হলে তাকে গুরু অনুপাত বলা হয় ।

ওপরের উদাহরণে দাদা আর তোমার বয়েসের অনুপাত, 18 : 12 হল গুরু অনুপাত আর তোমার ও দাদার বয়েসের অনুপাত, 12 : 18 হল লঘু অনুপাত।

ব্যস্ত অনুপাত : যে কোনও সরল অনুপাতের পূর্ব ও উত্তর পদ দুটোকে উল্টে নিলে আমরা তার ব্যস্ত অনুপাত পাই। গুরু অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাত হবে লঘু অনুপাত, আর লঘু অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাত হবে গুরু অনুপাত। এটা আমরা ওপরের আলোচনাতেই দেখতে পাচ্ছি।

একক অনুপাত বা সাম্যানুপাত : সরল অনুপাতের পূর্ব ও উত্তর পদ দুটো সমান হলে আমরা একক অনুপাত পাই। এর লঘিষ্ঠ আকার হয় 1:1।

মিশ্র অনুপাত : একাধিক সরল অনুপাতের পূর্ব পদগুলোর গুণফলকে পূর্ব পদ ও উত্তর পদগুলোর গুণফলকে উত্তর পদ ধরে নিলে আমরা একটি সরল অনুপাত পাই। এটাকে বলে মিশ্র অনুপাত।

4.3 অনুপাত থেকে সমষ্টির অংশ: আনুপাতিক ভাগের হার

মনে করো, সিমেন্ট ও বালি মেশাতে হবে 3 : 5 অনুপাতে । মোট 32 কিলো মিশ্রন চাই। কতটা সিমেন্ট আর কতটা বালি মেশাবে?

সিমেন্ট : বালি এই অনুপাতটা 3 : 5, মানে হল 3+5 বা 8-এর মধ্যে সিমেন্ট হল $\frac{3}{8}$ অংশ আর বালি হল $\frac{5}{8}$ অংশ ।

তাহলে মোট 32 কিলো মিশ্রণ পেতে আমরা সিমেন্ট দেব $\frac{3}{8} \times 32 = 12$ কিলো আর বালি দেব $\frac{5}{8} \times 32 = 20$ কিলো ।

মনে রাখো: অনুপাতের পূর্বপদ ও উত্তরপদের যোগফল দিয়ে, পূর্বপদ ও উত্তরপদকে ভাগ করলে তাদেরকে সমষ্টির আনুপাতিক ভাগের হার বা অংশ হিসাবে পাওয়া যায়।

4.4 অনুপাতের অঙ্কের কিছু উদাহরণ

উদাহরণ 1. তোমার কাছে আছে 14 টাকা আর ভাইয়ের কাছে আছে 3 টাকা 50 পয়সা। তোমার ও ভাইয়ের টাকার অনুপাত কত?

লক্ষ করো, এখানে রাশি দুটো একই ধরনের, অর্থাৎ টাকা । কিন্তু এদের পরিমাপের একক আলাদা। তাই অনুপাত বার করতে আগে এদের পরিমাপ একই এককে আনতে হবে।

তোমার আছে 14 টাকা, মানে $14 \times 100 = 1400$ পয়সা

আর ভাইয়ের আছে 3 টাকা 50 পয়সা, মানে $3 \times 100 + 50 = 350$ পয়সা।

তাহলে অনুপাত হল, তোমার আছে : ভাইয়ের আছে $= 1400 : 350 = \frac{1400}{350}$

350 দিয়ে পূর্বপদ ও উত্তরপদকে অথবা ভগ্নাংশর লব ও হরকে ভাগ করে আমরা লঘিষ্ঠ আকারে অনুপাতটা পাই 4 : 1।

উত্তর: তোমার আছে : ভাইয়ের আছে = 4 : 1 ।

মনে রাখো: 1. এক জাতীয় রাশি হলেও অনুপাত বার করার সময় দেখে নেবে পরিমাপের একক একই আছে কিনা।
2. অনুপাত বার করে নিয়ে তাকে লঘিষ্ঠ আকারে উত্তরে লিখবে।

উদাহরণ 2. মিতা ও কবিতাকে ওদের মা কিছু টাকা দিয়ে বললেন মিতা পাবে 3 ভাগ আর কবিতা পাবে 2 ভাগ।

a) কবিতা ও মিতার টাকা অনুপাতে লেখ।
b) দুটো করে বার করো, মিতার কত টাকা হলে কবিতার কত টাকা হবে, আর কবিতার কত টাকা হলে মিতার কত টাকা হবে।
c) কে কত পাবে, যদি মা দিয়ে থাকেন 50 টাকা, 125 টাকা, 250 টাকা।

উত্তর কীভাবে বার করবে :

a) লক্ষ করো, যদিও বলা আছে মিতার 3 ভাগ আর কবিতার 2 ভাগ, প্রশ্নে চেয়েছে কবিতা ও মিতার ভাগের অনুপাত। তাই আমরা অনুপাতটা লিখব কবিতার টাকার ভাগ : মিতার টাকার ভাগ $= 2 : 3$ বা $\frac{2}{3}$

b) দুটো করে মোট চারটে সমতুল অনুপাত বার করতে হবে —মিতার ভাগটা ধরে নিয়ে কবিতার ভাগে কত, আর কবিতার ভাগটা ধরে নিয়ে মিতার ভাগে কত হবে। এই সমতুল ভগ্নাংশ আমরা বার করি এভাবে —

$$\frac{\text{কবিতার ভাগ}}{\text{মিতার ভাগ}} = \frac{2}{3} = \frac{\text{কবিতার ভাগ}}{9} = \frac{\text{কবিতার ভাগ}}{30} = \frac{80}{\text{মিতার ভাগ}} = \frac{160}{\text{মিতার ভাগ}}$$

প্রথমটা থেকে পাই, মিতা 9 টাকা পেলে কবিতা পাবে 6 টাকা, কারণ সমতুল করতে লবকেও 3 দিয়ে গুণ করতে হবে, যেহেতু হরকে 3 দিয়ে গুণ করা হয়েছে। এইভাবে, দ্বিতীয়টা থেকে পাই, কবিতা পাবে 20 টাকা, যদি মিতা পায় 30 টাকা। তৃতীয়টাতে হরকে 40 দিয়ে গুণ ও চতুর্থটাতে হরকে 80 দিয়ে গুণ করে সমতুল পাবো। অর্থাৎ, কবিতা 80 টাকা পেলে মিতা পাবে 120 টাকা ও কবিতা 160 পেলে মিতা পাবে 240 টাকা ।

$$\frac{2}{3} = \frac{\text{কবিতার ভাগ}}{\text{মিতার ভাগ}} = \frac{6}{9} = \frac{20}{30} = \frac{80}{120} = \frac{160}{240}$$

c) এখানে আগে অনুপাত থেকে বের করে নিতে হবে কার কত অংশ।
কবিতার টাকার ভাগ : মিতার টাকার ভাগ $= 2 : 3$ বা $\frac{2}{3}$

ভগ্নাংশ হিসাবে অনুপাত থেকে পাই লব ও হরের যোগফল $(2+3)$ হল 5। সুতরাং, 5-এর মধ্যে কবিতার অংশ হল $\frac{2}{5}$ আর মিতার অংশ হল $\frac{3}{5}$ ।

এবারে দেখো, মা 50 টাকা দিলে কবিতা পায় $50 \times \frac{2}{5} = 20$ টাকা

মিতা পায় $50 \times \frac{3}{5} = 30$ টাকা

এই ভাবে বার করো, মা 125 টাকা, ও 250 টাকা দিলে কবিতা ও মিতা কত টাকা করে পাবে।

উদাহরণ 3. তোমাদের ক্লাসে 30 মোট জন ছাত্রছাত্রীর মধ্যে 18 জন ছাত্র আর আর 12 জন ছাত্রী। বের করো —

a) ছাত্রীদের তুলনায় ছাত্রদের অনুপাত কত?
b) ছাত্রদের তুলনায় ছাত্রীদের অনুপাত কত?
c) মোট ছাত্রছাত্রীর (মধ্যে) তুলনায় ছাত্রদের অনুপাত কত?
d) মোট ছাত্রছাত্রীর তুলনায় (মধ্যে) ছাত্রীদের অনুপাত কত?

উত্তর কীভাবে বার করবে:

এই উদাহরণটা রাখা হল বিশেষ করে এটাই দেখানোর জন্য যে অনুপাত বার করার সময় সর্বদা খেয়াল রাখতে হবে, কোন্‌টার তুলনায় বা মধ্যে কার অনুপাত লিখছ। যেটার অনুপাত লিখছ, সেটা পূর্বপদ বা ভগ্নাংশের লব হবে, আর যেটার তুলনায় বা মধ্যে অনুপাতটা লিখছ, সেটা হবে উত্তরপদ বা ভগ্নাংশের হর। এটা উল্টে গেলে ভুল হয়ে যাবে কারণ অনুপাতের মানেটাই উল্টো যাবে।

a) ছাত্রদের অনুপাত বার করতে হবে
ছাত্র সংখ্যা হল 18 আর ছাত্রী সংখ্যা হল 12।
সুতরাং, ক্লাসে ছাত্র : ছাত্রী হল 18 : 12 বা $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

b) ছাত্রীদের অনুপাত বার করতে হবে
ছাত্রী সংখ্যা হল 12 আর ছাত্র সংখ্যা হল 18।
সুতরাং, ক্লাসে ছাত্রী : ছাত্র হল 12 : 18 বা $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

c) ছাত্রদের অনুপাত বার করতে হবে মোট ছাত্রছাত্রীর (মধ্যে)
ছাত্র সংখ্যা হল 18 আর মোট ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা হল 30।
সুতরাং, ক্লাসে ছাত্র : মোট ছাত্রছাত্রীর হল 18 : 30 বা $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

d) ছাত্রীদের অনুপাত বার করতে হবে মোট ছাত্রছাত্রীর (মধ্যে)
ছাত্রী সংখ্যা হল 12 আর মোট ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা হল 30।
সুতরাং, ক্লাসে ছাত্রী : মোট ছাত্রছাত্রীর হল 12 : 30 বা $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

লক্ষ করো: a ও b-য়ের অনুপাত দুটো হল একটা আরেকটার ব্যস্ত অনুপাত। c ও d-য়ের অনুপাত দুটো হল সমষ্টির অংশ বা আনুপাতিক ভাগের হার।

অনুশীলন 4.1

1. কবিতা আর সবিতার মধ্যে 4 : 3 অনুপাতে 280 টাকা ভাগ করে দিলে কে কত টাকা পাবে?
2. তোমার কাছে 26 টা পেয়ারা আছে। তুমি ও মিতা 5 : 8 অনুপাতে ভাগ করে নেবে। কে কটা পাবে?
3. 3 মিটার লম্বা একটা বাঁশের 50 সেমি তুমি সবুজ রঙ করলে ও বাকি অংশ সাদা রঙ করলে। তিনটে অনুপাত বের করো—
   a) বাঁশটার দৈর্ঘ্য ও সবুজ রঙ করা অংশের দৈর্ঘ্য;
   b) বাঁশটার দৈর্ঘ্য ও সাদা রঙ করা অংশের দৈর্ঘ্য;
   c) সবুজ রঙ করা অংশের দৈর্ঘ্য ও সাদা রঙ করা অংশের দৈর্ঘ্য ।

4. ইস্কুলের একটা আলমারিতে অঙ্ক ও বিজ্ঞানের বই রাখা আছে 4 : 3 অনুপাতে। আলমারিতে মোট বইয়ের সংখ্যা 420টা । কটা অঙ্কের বই আর কটা বিজ্ঞানের বই আছে?
5. শরবৎ তৈরি করতে জল ও সিরাপ মেশাতে হয় 7 : 4 অনুপাতে। 20 লিটার সিরাপের সাথে কত লিটার জল মেশাতে হবে?
6. নিচের কোন্‌টা কোন্‌টার অনুপাত বের করা যায় বা যায় না লেখো —
   a) তোমার ওজন ও আমার উচ্চতা;
   b) রাজু কতক্ষণ হল স্কুলে এসেছে ও নব ইস্কুলে আসার জন্য কতক্ষণ আগে বাড়ি থেকে বের হয়েছে;
   c) একটা জিনিস বিক্রি করে বাবলুর লাভ হল 40 টাকা আর সেটা বিক্রি করে টুবলুর লোকসান হল 20 টাকা;
   d) তোমার কাছে কত টাকা ছিল ও কত টাকা খরচ করেছ।

   যেগুলোর অনুপাত করা যাবে না, ব্যাখ্যা করো কেন যাবে না।
7. নিচে দেওয়া অনুপাতগুলোর পূর্বপদ, উত্তরপদ, অনুপাতটা লঘু না গুরু, ব্যস্ত অনুপাত, লঘিষ্ঠ আকার, ও লঘিষ্ঠ আকারটার তিনটে করে সমতুল অনুপাত পাশে লেখো :

অনুপাত		পূর্ব পদ	উত্তর পদ	লঘু/ গুরু	ব্যস্ত অনুপাত	লঘিষ্ঠ আকার	সমতুল অনুপাত		
a.	18:48								
b.	27:14								
c.	45:27								
d.	32:24								
e.	20:25								

উত্তর 4.1

1.	কবিতা 160, সবিতা 120 টাকা	2.	তুমি 10 মিতা 16 টা পেয়ারা
3.	6:1; 6:5; 1:5	4.	অঙ্কের 240, বিজ্ঞানের 180 টা বই
5.	35 লিটার জল	6.	d) হবে। বাকিগুলো হবে না।

ওপরের 6 নম্বর অঙ্কটা থেকে বুঝে নাও—

দুটো রাশির পরিমাপ ও পরিমাপের একক এক হলেই যে তুলনা করে অনুপাত করা যায় তা নয়। রাশি দুটো তুলনীয়, মানে তুলনার অর্থ থাকতে হবে।

4.5 দুইয়ের বেশি সমজাতীয় রাশির অনুপাত

আমরা দুটো সমজাতীয় রাশি নিয়ে সরল অনুপাত দেখেছি। আরও বেশি সংখ্যক সমজাতীয় রাশি নিয়েও অনুপাত হতে পারে। কয়েকটা উদাহরণ দেখো —

a) ধরা যাক, একটা বাঁশের দৈর্ঘ্যের 2 ভাগ কাদায়, 3 ভাগ জলে ও 4 ভাগ জলের ওপরে আছে। কী অনুপাতে বাঁশটার কতটা কাদায়, জলে আর জলের ওপরে আছে। এর উত্তর আমরা সহজেই লিখব 2 : 3 : 4।

b) মনে করো ঢালাই করার কংক্রিট বানাতে 2 ভাগ সিমেন্ট, 5 ভাগ বালি, ও 3 ভাগ পাথরের টুকরো (স্টোন চিপ্‌স) মেশাতে হয়। এই মিশ্রনটা কী অনুপাতে তৈরি করা হয়.? এর উত্তর হল সিমেন্ট : বালি : স্টোন চিপ্‌স = 2 : 5 : 3।

c) বাবার বয়েস 36, মায়ের বয়েস 30, দাদার বয়েস 9 ও তোমার বয়েস 6। তোমাদের বয়েসের অনুপাত কীভাবে লিখবে। উত্তর হল 36 : 30: 9 : 6 ।

এই ধরনের অনুপাতের অঙ্কের কয়েকটা উদাহরণ করে দেখো —

1. টিংকু, পিংকু আর রিংকুকে 360 টাকা এমনভাবে ভাগ করে দাও, যাতে ওরা 2 : 3 : 7 অনুপাতে টাকা পায়।

   টাকা পাওয়ার অনুপাত হল, টিংকু : পিংকু : রিংকু = 2 : 3 : 7।
   তাহলে আনুপাতিক ভাগ হার বা অংশ হল,

$$\text{টিংকু} = \frac{2}{2+3+7} = \frac{2}{12}$$

$$\text{পিংকু} = \frac{3}{2+3+7} = \frac{3}{12}$$

$$\text{রিংকু} = \frac{7}{2+3+7} = \frac{7}{12}$$

সুতরাং আনুপাতিক ভাগ হার অনুসারে, 360 টাকার 12 ভাগের 2 ভাগ পাবে টিংকু, 3 ভাগ পাবে পিংকু, আর 7 ভাগ পাবে রিংকু । তাহলে উত্তর হল,

টিংকু পাবে $360 \times \frac{2}{12} = 30 \times 2 = 60$ টাকা;

পিংকু পাবে $360 \times \frac{3}{12} = 30 \times 3 = 90$ টাকা;

রিংকু পাবে $360 \times \frac{7}{12} = 30 \times 7 = 210$ টাকা ।

2. তোমাদের ইস্কুলের তিনটে ঘরে ছাত্রছাত্রীদের বসার জায়গা আছে 11 : 9: 15 অনুপাতে। এবার পরীক্ষায় মোট 350 জন পরীক্ষা দেবে। ওদের বসার ব্যবস্থা কীভাবে ভাগ করবে।

এই অঙ্কটা একই ভাবে নিজে করো। উত্তর পাবে, প্রথম ঘরে 110 জন, দ্বিতীয় ঘরে 90 জন, আর তৃতীয় ঘরে 150 জন।

3. টিংকু, পিংকু আর রিংকুকে 2700 টাকা এমনভাবে ভাগ করে দাও, যাতে টিংকু যা পায় পিংকু তার দ্বিগুণ পায়, আর রিংকু পায় টিংকু ও পিংকু মিলে যা পেয়েছে তার অর্ধেক।

   টিংকু 1 পেলে পিংকু পায় 2। তাহলে ওরা দুজনে মিলে পেল 3।
   সুতরাং, রিংকু পাবে তার অর্ধেক মানে, $\frac{3}{2}$ । তাহলে অনুপাত হল,
   টিংকু : পিংকু : রিংকু $= 1 : 2 : \frac{3}{2}$
   $= 2 : 4 : 3$ [2 দিয়ে গুণ করে]

   অঙ্কটা একই ভাবে নিজে করো। উত্তর পাবে, টিংকু 600 টাকা, পিংকু 1200 টাকা, আর রিংকু 900 টাকা পাবে ।

4. গ্রামের মানুষেরা নিজেরাই চাঁদা তুলে গ্রামের রাস্তাটা মেরামত করে প্রতি বছর। গত চার বছর যা খরচ হয়েছে তার অনুপাত হল 2 : 3: 2: 4। চার বছরে মোট 33121 টাকা খরচ হলে বের করো কোন্ বছর কত টাকা খরচ হয়েছিল।

   অঙ্কটা একই ভাবে নিজে করো। উত্তর পাবে, প্রথম বছর 6022 টাকা, দ্বিতীয় বছর 9033 টাকা, তৃতীয় বছর 6022 টাকা, আর চতুর্থ বছর 12044 টাকা খরচ হয়েছিল।

4.6 অনুপাত ও শতকরা

আমরা শিখেছি যে শতকরা হল এক বিশেষ ধরনের ভগ্নাংশ যার হর হল 100। তাই যেকোনও ভগ্নাংশের হরকে 100 করে নিয়ে আমরা সেটা শতকরা হিসাবে লিখতে বা বলতে পারি। এখন আমরা দেখলাম যে অনুপাতকেও ভগ্নাংশে লেখা যায়। তাই, অনুপাতকে শতকরায়, আবার শতকরাকেও অনুপাতে লেখা যাবে।

উদাহরণ

a) তোমার আছে 10 টাকা আর আমার আছে 7 টাকা। আমার কত টাকা আছে তোমার টাকার অনুপাতে?

এর উত্তর আমরা সহজেই দিতে পারি অনুপাতের হিসাবে 7 : 10 ।
এবার এটাকেই আমরা শতকরা হিসাবে বলতে পারি। তোমার টাকার অনুপাতে আমার টাকা হল,

$$\frac{7}{10} = \frac{7x10}{10x10} = \frac{70}{100} = 70\%$$

সুতরাং, আমরা এটাও বলতে পারি যে তোমার টাকার তুলনায় বা অনুপাতে আমার টাকা হল 70% ।

b) শরবৎ বানাতে জলে 18% সিরাপ মেশাতে হয়। জল ও সিরাপের অনুপাত কত?

18% মানে হল, $\frac{18}{100} = \frac{9}{50}$। সুতরাং, সিরাপ ও জলের অনুপাত 9:50।

c) পাঁচটি ওষুধ 2 : 4 : 7 : 3 : 9 অনুপাতে মিশিয়ে একটা মিক্সচার ওষুধ তৈরি করা হয়। মিক্সচার ওষুধটার মধ্যে কোন্ ওষুধটা শতকরা কতটা আছে কীভাবে বলবে?

এখানে আগে আনুপাতিক ভাগের হার বা অংশগুলো বার করতে হবে। তারপর এগুলোর হরকে 100 করে নিলে আমরা শতকরায় অনুপাত পাব। নিজে করে দেখো। উত্তর হবে 8%, 16%, 28%, 12%, 36%।

অনুশীলন 4.2

1. অনুপাতকে শতকরায় প্রকাশ করো

a. 2 : 5	b. 3 : 20	c. 4 :25	d. 17:10
e. 3 : 2	f. 6 : 5	g. 2 : 5 : 13	h. 22:17:11

2. শতকরাকে অনুপাতে প্রকাশ করো

a. 15%	b. 33%	c. 72%	d. 80%
e. 100%	f. 180%	g. 250%	h. 22.5%

4.7 সমানুপাতের ধারণা

সমানুপাত হল দুটো ভাগাভাগির অনুপাত সমান থাকা। ইংরেজিতে এই ধরনের তুলনা করাকে বলে প্রপোরশন (Proportion)। আমরা উদাহরণ দিয়ে বুঝব কী ধরনের সমস্যায় এই তুলনা করাটা প্রয়োজন হয়।

উদাহরণ 1. ইনু দিল 12 টাকা আর মিনু দিল 18 টাকা। এতে ওদের হল মোট 30 টাকা আর ওরা বাজারে গিয়ে 30 টাকায় 20 টা লজেন্স কিনল। ফিরে এসে ভাগ করার সময় ইনু বলল ও পাবে 10 টা লজেন্স। কিন্তু মিনু বলল, না তুমি পাবে 8 টা লজেন্স, আর আমি পাব 12 টা, কারণ আমি বেশি টাকা দিয়েছি। মিনু ঠিক না ইনু ঠিক?

উত্তরে বলতে হয়, ইনু আর মিনু যে অনুপাতে টাকা দিয়েছে, সেই অনুপাতেই ওদের উচিত লজেন্স ভাগ করে নেওয়া। এটাই সমানুপাতিক, বা

সমানুপাত অনুযায়ী হবে। সুতরাং, আমাদের প্রথমে দেখতে হবে ইনু আর মিনু কী অনুপাতে টাকা দিয়েছে, ও তারপর দেখব লজেন্সগুলো ইনু কী অনুপাতে আর মিনু কী অনুপাতে ভাগাভাগি করতে চাইছে। যার ভাগাভাগির অনুপাতটা টাকা দেওয়ার অনুপাতের সঙ্গে সমান হবে, সে ঠিক।

ইনু দিয়েছে 12 টাকা আর মিনু দিয়েছে 18 টাকা। অনুপাত হল 12:18 = 2:3
ইনু চাইছে 10টা, তাহলে মিনু পায় 10টা লজেন্স। অনুপাত হল 10:10 = 1:1
মিনু চাইছে ইনু পাবে 8 টা আর ও পাবে 12 টা । অনুপাত হল 8:12 = 2:3

সুতরাং, মিনু ঠিক। কারণ, মিনুর ভাগাভাগিতে ইনু ও মিনুর টাকা দেওয়ার অনুপাত 12:18 আর লজেন্সের ভাগের অনুপাত 8:12 সমান।

মনে রাখো: দুটো অনুপাত সমান হলে সেই সংখ্যাগুলোকে সেইভাবে সাজিয়ে বলা হয় সমানুপাতে আছে। অনুপাত দুটোর মাঝে সমানুপাতের চিহ্ন (: :) দেওয়া হয়। সমানুপাতের রাশি বা সংখ্যাগুলোকে বলা হয় সমানুপাতী পদ।

12:18 আর 8:12 অনুপাত দুটো সমান। তাই আমরা লিখব 12:18 **::** 8:12। এর মানে হল, 12, 18, 8, 12 সংখ্যাগুলো এইভাবে সাজালে সমানুপাতে আছে। তাই এখানে 12, 18, 8, 12 হল সমানুপাতী পদ।

লক্ষ করো, একই সংখ্যাগুলো ঠিক উল্টে সাজালে 12, 8, 18, 12 সমানুপাতী হবে। কিন্তু অন্যরকম সাজালে সমানুপাতী হবে না।

উদাহরণ 2. হাবুলের কাছে 24টা পেয়ারা আর বাবুলের কাছে 18টা কলা আছে। হাবুল 4টে পেয়ারা বাবুলকে দিল। কিন্তু বাবুল হাবুলকে দিল মাত্র 3টে কলা। হাবুল বলল, আমি তোকে 4টে দিলাম, আর তুই আমাকে 3টে দিলি, এটা কি ঠিক হল? ওরা মিতার কাছে গেল, আর মিতা হিসাব করে বলল, ঠিক ভাগাভাগিই হয়েছে। মিতা কীভাবে হিসাবটা করল?

মিতা হিসাবটা করল এইভাবে—

হাবুলের মোট পেয়ারা : হাবুল দিয়েছে = 24 : 4 = 6 : 1
বাবুলের মোট কলা : বাবুল দিয়েছে = 18 : 3 = 6 : 1

সুতরাং, যার যত আছে তার একই অনুপাতে, 6 : 1 করে, অন্যকে দিয়েছে। এটা সমানুপাতিক। তাই ঠিক ভাগাভাগিই হয়েছে।

উদাহরণ 3. হাইস্কুল থেকে রাজুর বাড়ি 15 কিমি আর বাবুর বাড়ি 12 কিমি দূরে। সাইকেল চালিয়ে ওরা ইস্কুলে এল । রাজুর লাগল 20 মিনিট আর বাবুর

লাগল 16 মিনিট। বাবুর কম সময় লেগেছে, তাই বাবু বলল ও রাজুর থেকে বেশি জোরে সাইকেল চালায়। বাবু কি ঠিক বলল?

বাড়ির দূরত্বের অনুপাত, রাজু : বাবু = 15 : 12 = 5 : 4
সময় লাগার অনুপাত, রাজু : বাবু = 20 : 16 = 5 : 4
15 : 12 আর 20 : 16 লঘিষ্ঠ আকারে এনে দেখা যাচ্ছে দুটোই সমান। তাই দুটো অনুপাত হল 15 : 12 : : 20 : 16, মানে সমানুপাতিক। অতএব, বাবু ঠিক বলেনি, দুজন একই গতিতে সাইকেল চালিয়েছে।

উদাহরণ 4. মিতা 12 টা পেন কিনল 60 টাকা দিয়ে আর পূর্ণিমা 18 টা পেন কিনল 72 টাকা দিয়ে। দুজনে কি একই দামে পেন কিনেছে?

দুজনের খরচের অনুপাত, মিতা : পূর্ণিমা = 60 : 72 = 5 : 6
পেনের সংখ্যার অনুপাত, মিতা : পূর্ণিমা = 12 : 18 = 2 : 3
60 : 72 আর 12 : 18 সমানুপাতিক নয়, তাই দুজনে সমান দামে পেন কেনেনি। দুটো অনুপাতকে ভগ্নাংশের আকারে সমান হর করে নিয়ে তুলনা করলে দেখবে মিতা দাম বেশি দিয়েছে।

4.8 সমানুপাতে আছে কিনা দেখা

চারটে সংখ্যা সমানুপাতে আছে কিনা দেখার একটা সহজ উপায় আছে। লক্ষ করো 15 : 12 : : 20 : 16 হল সমানুপাতিক। এই সমানুপাতের চারটি সংখ্যাকে বলে সমানুপাতের পদ বা সমানুপাতী পদ।

মনে রাখো: সমানুপাতের পদগুলোকে পর পর বলা হয় প্রথম পদ, দ্বিতীয় পদ, তৃতীয় পদ ও চতুর্থ পদ । এছাড়া, প্রথম ও চতুর্থ পদকে প্রান্তীয় পদ আর দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদকে মধ্য পদও বলা হয়।

এখানে 15 হল প্রথম পদ, 12 দ্বিতীয় পদ, 20 তৃতীয় পদ ও 16 চতুর্থ পদ ।
এবারে দেখো ভগ্নাংশের আকারে এই সমানুপাতের মানে হল,

$$\frac{15}{12} = \frac{20}{16} \text{ মানে হল, } \frac{\text{প্রথম পদ}}{\text{দ্বিতীয় পদ}} = \frac{\text{তৃতীয় পদ}}{\text{চতুর্থ পদ}}$$

এবার লক্ষ করো, প্রথম পদ x চতুর্থ পদ = 15 x 16 = 240
আর, দ্বিতীয় পদ x তৃতীয় পদ = 12 x 20 = 240

মনে রাখো: পরপর চারটি সংখ্যা সমানুপাতে থাকলে
প্রথম পদ x চতুর্থ পদ = দ্বিতীয় পদ x তৃতীয় পদ
এই নিয়মটা দিয়েই পরীক্ষা করতে পারব, চারটি সংখ্যা সমানুপাতে আছে কিনা।

> এই নিয়মটা থেকে আমরা আরও বার করতে পারব, চারটে সমানুপাতী পদের কোনও একটার সংখ্যাটা জানা না থাকলে, সেটা কত হতে হবে। তাই, আগে ঐকিক নিয়ম দিয়ে করেছ, এমন কিছু অঙ্ক সমানুপাতের নিয়ম ব্যবহার করেও করতে পারবে।

উদাহরণ 5. রাজু আর বাবু পিকনিকে চাঁদা দিল 20 টাকা আর 28 টাকা করে। মিতা আর কবিতা, দুই বন্ধুর মিতা দিল 25 টাকা, ও কবিতাকে বলল, তুই এমন টাকা চাঁদা দে, যাতে আমাদের অনুপাত রাজু আর বাবুর অনুপাতের সমান হয়। কবিতাকে কত টাকা চাঁদা দিল?

এখানে চাঁদা দেওয়ার টাকা হিসাবে প্রথম পদ রাজুর 20, দ্বিতীয় পদ বাবুর 28, তৃতীয় পদ মিতার 25 ও চতুর্থ পদ কবিতার চাঁদা আমাদের অজানা ।
সমানুপাতের নিয়ম থেকে আমরা লিখতে পারি চাঁদা দেওয়ার হিসাবে

রাজু : বাবু = মিতা : কবিতা হবে যদি

রাজু x কবিতার চাঁদা = বাবু x মিতার চাঁদা

বা, 20 x কবিতার চাঁদা = 28 x 25 হয় ।

সুতরাং, কবিতার চাঁদা = (28 x 25) ÷ 20 = 700 ÷ 20 = 35 টাকা ।

4.9 চারটে সমানুপাতী সংখ্যা থেকে একাধিক সমানুপাত বের করা

লক্ষ করো, 3 : 2 : : 6: 4 একটা সমানুপাত। এখানে চারটে সংখ্যা হল 3, 2, 6, ও 4 । এগুলোকে দিয়েই আমরা আরও সমানুপাত তৈরি করতে পারব।

a) 2 ও 6 কে প্রান্তীয় পদ করলাম। সমানুপাতের নিয়ম রেখে তাহলে পাই, 2 : 4 : : 3 : 6 । আবার ব্যস্ত অনুপাতেও হবে, 4 : 2 : : 6 : 3 ।

b) 3 ও 4 কে প্রান্তীয় পদ করলাম। সমানুপাতের নিয়ম রেখে তাহলে পাই, 3 : 6 : : 2 : 4 । আবার ব্যস্ত অনুপাতেও হবে, 6 : 3 : : 4 : 2 ।

পরে এটা বীজগণিতের নিয়মে শিখবে।

অনুশীলন 4.3

1. নিচের সংখ্যাগুলো সমানুপাতে আছে কিনা দেখো

a. 12, 24, 27, 54 b. 45, 15, 27, 9 c. 21, 63, 9, 27

e. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$ f. $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{15}$ g. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{28}$

2. লালু 15টা কলা কিনেছে 25 টাকায়, আর ভুলু কিনেছে 20 টাকায় 12টা কলা। দুজনে কি সমান দাম দিয়েছে?

3. ইস্কুল থেকে লালুর বাড়ি 750 মিটার আর ভুলুর বাড়ি 900 মিটার দূরে। বাড়ি থেকে ইস্কুলে হেটে আসতে লালু সময় নেয় 35 মিনিট আর ভুলু সময় নেয় 42 মিনিট। দুজনে কি একই অনুপাতে সময় নেয়?
4. মিতার উচ্চতা হলে 140 সেমি আর ওর মায়ের উচ্চতা হল 165 সেমি। আবার মিতার ওজন হল 42 কেজি আর ওর মায়ের ওজন হল 49.5 কেজি। তুলনা করে বলো, ওদের দুজনের উচ্চতার সাথে ওজন সমানুপাতে আছে কি?

4.10 ত্রৈরাশিক: ঐকিক নিয়মের বদলে সমানুপাত দিয়ে সমাধান

দুইটি রাশির মধ্যে কোনও নির্দিষ্ট সম্পর্ক জানা থাকলে আমরা ঐকিক নিয়ম ব্যবহার করে বার করতে পারি কোনও একটা রাশির মান থেকে অন্য রাশিটির মান কী হবে। দুইটি রাশির মধ্যে এই নির্দিষ্ট সম্পর্কটাকে আবার অনুপাত হিসাবেও দেখা যায় ও সমানুপাতের নিয়ম ব্যবহার করে একই প্রশ্নের উত্তর পাওয়া যায়। নিচের উদাহরণটা দেখো। এই ধরনের দুইটি রাশি নিয়ে সমস্যা বা অঙ্ককে আমরা **দ্বিরাশিক** বলি।

দেখে নাও: সমানুপাতে লিখলে পদগুলো সরল অনুপাত না ব্যস্ত অনুপাতে হবে।

উদাহরণ 6. 4 জন লোক একটা কাজ 15 দিনে করে। 10 জন লোক ওই কাজটা কত দিনে করবে?

খেয়াল করো, লোকের সংখ্যা বাড়লে কাজটা তাড়াতাড়ি হবে, মানে দিনের সংখ্যা কমবে। তাই সমানুপাতে লোকের সংখ্যার অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাত হবে দিনের সংখ্যার অনুপাত। ধরো, 10 জন লোক একই অনুপাতে কাজটা করবে ? দিনে।

প্রথম	4 জন	15 দিনে
দ্বিতীয়	10 জন	? দিনে

তাহলে সমানুপাত লিখতে একটা অনুপাতকে ব্যস্ত অনুপাত করে নিতে হবে,

$$4 : 10 :: ? : 15 \quad \text{বা,} \quad \frac{4}{10} = \frac{?}{15} \text{ ।}$$

সুতরাং, $? = \frac{4}{10} \times 15 = 6$ দিন ।

তিনটি রাশির মধ্যে কোনও নির্দিষ্ট সম্পর্ক জানা থাকলে তাকে বলি **ত্রৈরাশিক** যেমন, কত জন লোক, কত দিন কাজ করে কতটা জমি চাষ করে। ত্রৈরাশিক সম্পর্কটা দিয়ে আমরা যেকোনও দুটো রাশি জানা থাকলে তৃতীয় রাশিটা কত হবে বার করতে পারি। আমরা আগে ঐকিক নিয়মে এটা করেছি দুই ধাপে। সমানুপাতের নিয়ম দিয়ে এটা একবারেই করা যায়।

উদাহরণ 7. 5 জন লোক 15 দিনে 18 বিঘা জমি চাষ করে। 10 জন লোক 10 দিনে কত বিঘা চাষ করবে?

প্রথম	5 জন	15 দিনে	18 বিঘা
দ্বিতীয়	10 জন	10 দিনে	? বিঘা

নির্ণেয় হল বিঘা জমি। দিন একই রেখে বিঘা বাড়ালে জন বেশি লাগে। আবার, জন একই রেখে বিঘা বাড়ালে দিন বেশি লাগে। তাই দুটোই সরল অনুপাতে আছে। সুতরাং, এখানে ত্রৈরাশিক সমানুপাত থেকে পাই,

$$\frac{\text{বিঘা দ্বিতীয় ?}}{\text{বিঘা প্রথম 18}} = \frac{\text{জন দ্বিতীয় 10}}{\text{জন প্রথম 5}} \times \frac{\text{দিন দ্বিতীয় 10}}{\text{দিন প্রথম 15}}$$

তাহলে হবে $? = 18 \times \frac{10}{5} \times \frac{10}{15} = 24$ বিঘা।

উদাহরণ 8. 5 জন লোক 4 দিনে 128 মিটার রাস্তা সারায়। 10 জন লোক কতদিনে 640 মিটার সারাবে?

ধরো, 10 জন লোক একই অনুপাতে কাজটা করবে ? দিনে।

প্রথম	5 জন	128 মিটার	4 দিনে
দ্বিতীয়	10 জন	640 মিটার	? দিনে

আমাদের নির্ণেয় হল কতদিন। আমরা এই নির্ণেয়কে হর ধরে ভগ্নাংশ আকারে দিনের অনুপাত বাঁদিকে লিখব। এরপর অন্য দুটো অনুপাতের এক একটার সাথে (অন্যটা একই আছে ধরে নিয়ে) এর সম্পর্কটা সরল না ব্যস্ত দেখব ও সেই অনুসারে গুণ করে লিখব।

(কাজের পরিমাণ একই রেখে) দিন বাড়লে লোক কম লাগে : ব্যস্ত অনুপাত।
(লোক একই রেখে) দিন বাড়লে কাজের পরিমাণ বাড়ে : সরল অনুপাত।

(কাজের পরিমাণ একই) $\frac{?}{4} = \frac{5}{10}$; (লোক একই) $\frac{?}{4} = \frac{640}{128}$ ।

সুতরাং, $$\frac{\text{দিন দ্বিতীয় ?}}{\text{দিন প্রথম 4}} = \frac{\text{লোক প্রথম 5}}{\text{লোক দ্বিতীয় 10}} \times \frac{\text{কাজের পরিমাণ দ্বিতীয় 640}}{\text{কাজের পরিমাণ প্রথম 128}}$$

তাহলে $? = 4 \times \frac{5}{10} \times \frac{640}{128} = 10$ দিন।

ত্রৈরাশিক বুঝতে ওপরের উদাহরণ দুটোর পার্থক্য বিশেষ করে দেখে রাখো।

পাঠ 5. ক্রমবাচক সংখ্যা, রোমান সংখ্যা, ও আন্তর্জাতিক স্থানীয় মান

5.1 ক্রমবাচক সংখ্যা

ক্রমবাচক সংখ্যা দিয়ে আমরা একের বেশি ব্যক্তি বা বস্তুর অবস্থানকে নির্দিষ্ট করে বলি। মনে করো, তোমরা লাইন করে দাঁড়িয়েছ। কে কোথায় দাঁড়িয়েছ, কে আগে কে পরে, কী করে বলব?

অথবা ভাব, ইস্কুলের পরীক্ষার রেজাল্ট বেরিয়েছে। কেউ সবচেয়ে বেশি নম্বর পেয়েছে, তার পরে আছে আরেকজন, তার পরে আরেকজন, এইভাবে সাজিয়ে বলব কী করে?

আবার মনে করো, বইয়ের আলমারির 7টা তাক আছে ও দিদিমণি তোমাকে বললেন, এই বইটা আলমারিতে তুলে রাখো। তুমি দিদিমণিকে জিজ্ঞাসা করলে, কোন্ তাকটাতে রাখব? এর উত্তরে দিদিমণি কীভাবে একটা তাক নির্দিষ্ট করে বলে দেবেন । এই ধরনের প্রশ্নগুলোতে স্থান নির্দিষ্ট করে বলতে ক্রমবাচক সংখ্যা ব্যবহার করতে হয়।

আমরা বাংলা ও ইংরেজিতে ক্রমবাচক সংখ্যা কীভাবে বলা ও লেখা হয় সেটা আগে দেখে নেব। আমরা এখানে 20 পর্যন্ত স্থান নির্দিষ্ট করার সংখ্যা দেখাব। একই ভাবে 20-র পরের স্থান নির্দিষ্ট করার ক্রমবাচক সংখ্যাও হবে।

বাংলা ক্রমবাচক সংখ্যা		ইংরেজি ক্রমবাচক সংখ্যা		
বলা হয়	লেখা হয়	বলা হয়		লেখা হয়
প্রথম	১ম	first	ফার্স্ট	1st
দ্বিতীয়	২য়	second	সেকেন্ড	2nd
তৃতীয়	৩য়	third	থার্ড	3rd
চতুর্থ	৪র্থ	fourth	ফোর্থ	4th
পঞ্চম	৫ম	fifth	ফিফ্‌থ	5th
ষষ্ঠ	৬ষ্ঠ	sixth	সিক্সথ	6th
সপ্তম	৭ম	seventh	সেভেন্‌থ	7th
অষ্টম	৮ম	eighth	এইট্‌থ	8th
নবম	৯ম	ninth	নাইন্‌থ	9th
দশম	১০ম	tenth	টেন্‌থ	10th

বাংলা ক্রমবাচক সংখ্যা		ইংরেজি ক্রমবাচক সংখ্যা		
বলা হয়	লেখা হয়	বলা হয়		লেখা হয়
একাদশ	১১শ	eleventh	ইলেভেন্থ	11th
দ্বাদশ	১২শ	twelfth	টুয়েলফ্থ	12th
ত্রয়োদশ	১৩শ	thirteenth	থারটিন্থ	13th
চতুর্দশ	১৪শ	fourteenth	ফোরটিন্থ	14th
পঞ্চদশ	১৫শ	fifteenth	ফিফ্টিন্থ	15th
ষোড়শ	১৬শ	sixteenth	সিক্সটিন্থ	16th
সপ্তদশ	১৭শ	seventeenth	সেভেন্টিন্থ	17th
অষ্টাদশ	১৮শ	eighteenth	এইটিন্থ	18th
উনবিংশ	১৯শ	nineteenth	নাইনটিন্থ	19th
বিংশ	২০শ	twentieth	টুয়েনটিয়েথ	20th

লক্ষ করো: ক্রমবাচক সংখ্যাগুলো লেখার সময় বাংলায় বলা শব্দটার শেষ বর্ণটাকে, আর ইংরেজির ক্ষেত্রে বলা শব্দটার শেষ দুটো বর্ণকে সাধারণ সংখ্যার পরে লেখা হচ্ছে।

মনে রাখো: বাংলায় ক্রমবাচক বিংশ স্থানটার পরের স্থানগুলোকে আমরা একবিংশ, দ্বাবিংশ, ইত্যাদি করে বলতে পারি। সহজতর হল বাংলায় 'তম' শব্দটা ব্যবহার করে এগুলো বলা। তাই বাংলায় বড় বড় ক্রমবাচক সংখ্যাকে 'তম' দিয়ে বলাটাই প্রচলিত। তাই আমরা বলব ও লিখব, যেমন ২১তম, ২২তম, ৫৭তম, ৭২তম ইত্যাদি।

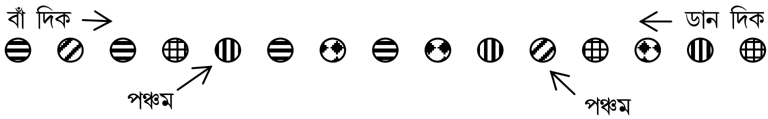
ক্রমবাচক সংখ্যার বিশেষত্ব

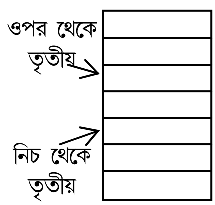
1. ক্রমবাচক সংখ্যা দিয়ে স্থান বোঝানোর সময় কোন্‌দিক থেকে স্থানটা বলা হচ্ছে তা বলে দিতে হয়— বাঁ দিক থেকে ডান দিকে, না ডান দিক থেকে বাঁ দিকে, অথবা ওপর থেকে নিচে না নিচ থেকে ওপরে।
2. ভাল-খারাপ বা কম-বেশি ইত্যাদি গুণাগুণ অনুযায়ী সাজানোয় ক্রমবাচক সংখ্যা ব্যবহারের সময় ওই সাজানোর গুণাগুণটা অবশ্যই উল্লেখ করতে হয়, নয়ত বোঝার ভুল হয়ে যায়।

আমরা ওপরের বিশেষত্ব দুটো ব্যাখ্যা করে বুঝব।

স্থান নির্দিষ্ট করতে কোন্ দিকে থেকে উল্লেখ করা

মনে করো তোমার সামনে 15টা বল রাখা আছে। তোমাকে বলা হল পঞ্চম বলটা তুলে নিতে। তুমি কোন্‌টা নেবে? তোমার প্রশ্ন করা উচিত, কোন্ দিক থেকে পঞ্চম — বাঁ দিক না ডান দিক থেকে। কারণ এই দুটো কিন্তু এক নয়। নিচের ছবিতে দেখো। আরও জানতে হবে, কার বাঁদিক বা ডানদিক, যেমন "তোমার বাঁদিক থেকে পঞ্চম"।





আবার মনে করো, বইয়ের আলমারির 7টা তাক আছে ও দিদিমণি তোমাকে বললেন, এই বইটা আলমারির তৃতীয় তাকটাতে তুলে রাখো। তোমার প্রশ্ন করা উচিত, কোন্ দিক থেকে তৃতীয় — ওপর থেকে না নিচ থেকে তৃতীয় তাকটাতে রাখব?

লক্ষ করো, এখানেও ওপর থেকে তৃতীয় তাক যেটা পাচ্ছ, সেটা হল নিচ থেকে পঞ্চম তাক। তাই এখানেও জেনে নিতে হবে কোন্ দিকে থেকে তৃতীয়।

গুণাগুণ অনুযায়ী সাজানোর গুণাগুণটা উল্লেখ করা

মনে করো, 7 টা ফলের কে কোন্‌টা বেশি বা কম পছন্দ করে লিখতে বলা হল ক্রমবাচক সংখ্যা দিয়ে সাজিয়ে। অমল আর বিমল এইভাবে সাজিয়ে লিখল—

অমল সাজিয়েছে		বিমল সাজিয়েছে	
বেশি থেকে কম পছন্দ	ফলের নাম	কম থেকে বেশি পছন্দ	ফলের নাম
প্রথম	আম	প্রথম	কাঁঠাল
দ্বিতীয়	কলা	দ্বিতীয়	জাম
তৃতীয়	লিচু	তৃতীয়	বাতাবি
চতুর্থ	পেয়ারা	চতুর্থ	পেয়ারা
পঞ্চম	বাতাবি	পঞ্চম	লিচু
ষষ্ঠ	জাম	ষষ্ঠ	কলা
সপ্তম	কাঁঠাল	সপ্তম	আম

লক্ষ করে দেখো, অমল আর বিমলের পছন্দ একেবারে এক রকম। কিন্তু পছন্দের তালিকাটা দুজনে দুভাবে করেছে। তাই, কে কীভাবে করেছে — বেশি থেকে কম না কম থেকে বেশি — সেটা এই তালিকায় বলে দেওয়া দরকার। নয়ত বোঝার ভুল হবে।

> ক্রমবাচক সংখ্যাগুলো হল তুলনামূলক, যা বোঝায় পরপর সাজানো স্থানের কোন্‌টার আগে বা পরে কোন্‌টা। এই সংখ্যাগুলো নিয়ে কোনওরকম যোগ-বিয়োগ বা গুণ-ভাগ করা যায় না। এখানে শূন্য (0) বলে কিছু হয় না।

অনুশীলন 5.1

অঙ্ক পরীক্ষায় দশজন ছাত্রছাত্রী 100 নম্বরে মধ্যে কে কত নম্বর পেয়েছে তা দেওয়া হল — রাজ 78, নব 65, স্বাতি 86, কবিতা 75, পূর্ণিমা 57, শুভদীপ 61, লক্ষ্মী 67, সন্দীপ 56, মিতা 68, প্রতিমা 52 ।

a) ক্রমবাচক সংখ্যা দিয়ে ছাত্রছাত্রীদের তালিকা তৈরি করো।

b) বেশি নম্বর পেয়ে চতুর্থ কে হয়েছে?

c) কম নম্বর পাওয়ার হিসাবে তৃতীয় কে হয়েছে?

5.2 রোমান সংখ্যা

আমরা অঙ্ক করতে যে সংখ্যাগুলো ব্যবহার করি, তাকে বলা হয় হিন্দু-আরবিক সংখ্যা। এগুলোর মধ্যে শূন্য ব্যবহার করা হয় ও এগুলো দিয়ে আমরা যোগ-বিয়োগ গুণ-ভাগ ইত্যাদি করতে পারি। এগুলোকে হিন্দু-আরবিক বলা হয়, কারণ এর উৎপত্তি হয়েছিল ভারতে, ও আরব দেশ হয়ে তা পৌঁছয় ইউরোপে। সেই সময়ে ইউরোপে ব্যবহার হতো রোমান সংখ্যা । পরে, চতুর্দশ শতক থেকে ক্রমে ক্রমে হিন্দু-আরবিক সংখ্যা তার স্থান দখল করে। ক্রমবাচক সংখ্যা হিসাবে এই রোমান সংখ্যাগুলোর ব্যবহার এখনও প্রচলিত আছে, যেমন ইস্কুলের শ্রেণিগুলো লেখা হয় রোমান সংখ্যা দিয়ে। আমরা তাই দেখে রাখব, এই সংখ্যাগুলো কীভাবে লেখা হয়।

রোমান সংখ্যাগুলো লেখায় সাতটা চিহ্ন ব্যবহার হয়, যার অর্থ হিন্দু-আরবিক সংখ্যায় নিচে দেওয়া হল —

রোমান সংখ্যা	I	V	X	L	C	D	M
হিন্দু-আরবিক সংখ্যা	1	5	10	50	100	500	10000

এই সাতটি চিহ্ন দিয়ে রোমান সংখ্যা লেখা হয় কয়েকটা নিয়ম মেনে।

1. কোনও চিহ্ন তিনবারের বেশি ব্যবহার হবে না;
2. কোনও চিহ্নের আগে যদি ছোট চিহ্ন বসানো হয় তাহলে তা বিয়োগ হবে;
3. কোনও চিহ্নের পরে যদি কোনও ছোট চিহ্ন বসানো হলে তা যোগ হবে; যদি দুবার বা তিন বার ছোট চিহ্নটা বসানো হয় তাহলে সেটা দুবার বা তিন বার যোগ হবে;
4. V, L, D, এই তিনটে চিহ্নকে বিশেষ করে লক্ষ করো। এগুলো বোঝায় 5, 50, 500। কোনও সংখ্যা লিখতে এগুলো কখনও বিয়োগ করা হবে না আর একবারের বেশি ব্যবহারও করা হবে না;
5. V, L, D, এই তিনটে চিহ্ন কখনোই আগে বসে বিয়োগ হবে না। কিন্তু বাকি চিহ্নগুলোও ঠিক তার পরের বড় চিহ্নটার আগে বসে মাত্র একবারই বিয়োগ হবে। যেমন, I চিহ্নটা V-এর আগে বসে একবারই বিয়োগ হবে, X চিহ্নটা L-এর আগে বসে একবারই বিয়োগ হবে, ও C চিহ্নটা M-এর আগে বসে একবারই বিয়োগ হবে।

এই নিয়ম মেনে 20 পর্যন্ত সংখ্যা রোমানে কীভাবে লেখা হবে দেখো—

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

লক্ষ করো:

4 লেখা হয় IV মানে (V–I), কিন্তু 6 লেখা হয় VI মানে (V+I), এইভাবে 8 লেখা হয়, V-এর পরে তিনবার I বসিয়ে VIII মানে (V+I+I+I)।

XIV লেখাটা মানে কিন্তু (X+I+V) নয়। এটা হবে (X+V–I)।

এই নিয়মে দশ করে ও একশ করে সংখ্যাগুলো কীভাবে লেখা হয় দেখো—

X	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC	C
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
C	CC	CCC	CD	D	DC	DCC	DCCC	CM	M
100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

ওপরের তালিকায় দেখো, 100 লেখা LL দিয়ে হবে না, কারণ L একবারের বেশি ব্যবহার হয়না। একই ভাবে 1000 লেখা DD দিয়ে হবে না, কারণ D একবারের বেশি ব্যবহার হয়না। তাই 100 লেখা হয় C আর 1000 লেখা হয় M দিয়ে।

আবার দেখো, কোনও চিহ্ন তিনবারের বেশি ব্যবহার হবে না। তাই 40 লেখা XXXX দিয়ে হবে না, লিখতে হবে XL । একই ভাবে 90 লেখা LXXXX দিয়ে হবে না, XC লিখতে হবে ।

অনুশীলন 5.2

1. রোমান সংখ্যাকে ভেঙে সাধারণ সংখ্যাটা কত লেখো

XXIII	=		+		+					=	
XIX	=		+		+					=	
XXIX	=		+		+					=	
XXIV	=		+		+					=	
XIX	=	X	+	IX						=	19
XL	=	L	–	X						=	40
XLIV	=	L	–	X	+	IV				=	44
LXXII	=	L	+	X	+	X	+	II		=	72
LXXIX	=	L	+	X	+	X	+	IX		=	79
XXVIII	=	X	+	X	+	V	+	III		=	28
XC	=									=	
XCIV	=									=	
DCXII	=									=	
XCIX	=									=	

2. সাধারণ সংখ্যাকে রোমান সংখ্যায় লেখো

a) 37	b) 56	c) 89	d) 94	e) 61
f) 99	g) 78	h) 44	i) 112	j) 422

5.3 আন্তর্জাতিক স্থানীয় মান

আমরা ভারতীয় হিসাব অনুযায়ী সংখ্যার স্থানীয় মান শিখেছি — একক, দশক, শতক, সহস্র (হাজার), অযুত (দশক হাজার), লক্ষ, নিযুত (দশক লক্ষ), কোটি। আন্তর্জাতিক হিসাব অনুযায়ী এই স্থানীয় মানগুলোকে ইংরেজিতে বলে ইউনিটস (Units), টেনস (Tens), হান্ডরেড্স (Hundreds), থাউজেন্ডস (Thousands), টেন থাউজেন্ডস (Ten Thousands), হান্ডরেড থাউজেন্ডস (Hundred Thousands), মিলিয়নস (Millions), টেন মিলিয়নস (Ten Millions), হান্ডরেড মিলিয়নস (Hundred Millions)। আন্তর্জাতিক স্থানীয় মানে আরও বড় সংখ্যা হল বিলিয়নস (Billions), আর তার পরে ট্রিলিয়নস (Trillions) ।

আন্তর্জাতিক ব্যবস্থায় স্থানীয় মান কীভাবে স্থির হয় নিচের সারণিতে দেখো —

ভারতীয় স্থানীয় মান	আন্তর্জাতিক স্থানীয় মান	Millions			Thousands			Ones		
		9	8	7	6	5	4	3	2	1
		Hundred Millions	Ten Millions	Millions	Hundred Thousands	Ten Thousands	Thousands	Hundreds	Tens	Ones
একক	One									1
দশক	Ten								1	0
শতক	1 Hundred							1	0	0
হাজার	1Thousand						1	0	0	0
দশ হাজার	10 Thousand					1	0	0	0	0
লক্ষ	100 Thousand				1	0	0	0	0	0
দশ লক্ষ	1000 Thousand =1 Million			1	0	0	0	0	0	0
কোটি	10 Million		1	0	0	0	0	0	0	0
দশ কোটি	100 Million	1	0	0	0	0	0	0	0	0

এইভাবে আরও বড় সংখ্যা বলা যায় —

একশ কোটি	1000 Million	= 1 Billion	= 1,000,000,000
হাজার একশ কোটি	1000 Billion	= 1 Trillion	=1,000,000,000,000

ওপরের সারণিতে দেওয়া ভারতীয় ব্যবস্থা ও আন্তর্জাতিক ব্যবস্থা তুলনা করে বুঝে নেব। লক্ষ করে দেখো, 10 হাজারের ঘর (5টি অঙ্ক) পর্যন্ত দুটো ব্যবস্থায় স্থানীয় মান একইভাবে বলা হয়—

10 টা একক (ইউনিটস)	= 1 টা দশ (টেন্‌স)	10
10 টা দশক (টেন্‌স)	= 1 টা শতক (হান্ডরেডস)	100
10 টা শতক (হান্ডরেড্‌স)	= 1 টা হাজার (থাউজেন্ডস)	1000
10 টা হাজার (থাউজেন্ডস)	= 1 টা দশ হাজার (টেন থাউজেন্ডস)	10,000

তফাতটা হয় তারপর —

<u>ভারতীয় ব্যবস্থায় স্থানীয় মানে</u>

100 টা হাজার	= 1 টা লক্ষ	1,00,000
100 টা লক্ষ	= 1 টা কোটি	1,00,00,000

<u>আন্তর্জাতিক ব্যবস্থায় স্থানীয় মানে</u>

100 টা হাজার (থাউজেন্ডস)	= 1 টা একশ হাজার (হান্ডরেড থাউজেন্ড)	100,000
1000টা হাজার (থাউজেন্ডস)	= 1 টা মিলিয়ন (থাউজেন্ড থাউজেন্ড)	1,000,000
1000টা মিলিয়নস	= 1 টা বিলিয়ন (থাউজেন্ড মিলিয়ন)	1000,000,000
1000টা বিলিয়নস	= 1 টা ট্রিলিয়ন (থাউজেন্ড বিলিয়ন)	1000,000,000,000

লক্ষ করো, একটি সংখ্যায় অঙ্কগুলির স্থানীয় মান বোঝার সুবিধার জন্য কমা (,) ব্যবহার করা হয়। আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতে ডানদিকের শেষ ঘরটা থেকে বাঁদিকে প্রতি তিনটি অঙ্কের আগে কমা দেওয়া হয়। ভারতীয় পদ্ধতিতে কমা দেওয়া হয় প্রথমে তিনটি অঙ্কের আগে ও তারপর দুটি করে অঙ্কের আগে ।

অনুশীলন 5.3 ভারতীয় ও আন্তর্জাতিক ব্যবস্থায় কমা দিয়ে সংখ্যা পড়ো ও কথায় লেখো

a) 5687432 b) 62130788 c) 8002157891 d) 70154782315

পাঠ 6. আসন্ন মান ও আবৃত্ত দশমিক

6.1 আসন্ন মান

সংখ্যার আসন্ন মান, ইংরেজিতে বলে অ্যাপ্রক্সিমেট (approximate), আমরা ব্যবহার করি বড় বড় সংখ্যাকে, বা দশমিক সংখ্যার দশমিক অংশটা পুরো বাদ দিয়ে অথবা কয়েক ঘর বাদ দিয়ে, ছোট করে বলতে ও বুঝতে। মনে রাখতে হবে যে এটা সংখ্যার প্রকৃত মান নয়। কেবল চট করে বোঝা ও বলার সুবিধার জন্য আসন্ন মান ব্যবহার করা হয়।

মনে করো একটা ইস্কুল বাড়ি তৈরি করার জন্য চাঁদা তোলা হয়েছে 1284489 টাকা। প্রকৃত মানে বলা হবে 12 লক্ষ 84 হাজার 4 শত 89 টাকা। একে আমরা আসন্ন মানে চট করে বলতে পারি —

লক্ষ পর্যন্ত আসন্ন মান $\cong 1300000$ প্রায় 13 লক্ষ টাকা।

হাজার পর্যন্ত আসন্ন মান $\cong 1284000$ প্রায় 12 লক্ষ 84 হাজার টাকা।

শত পর্যন্ত আসন্ন মান $\cong 1284500$ প্রায় 12 লক্ষ 84 হাজার 5 শত টাকা।

লক্ষ করো, আসন্ন মানে প্রকাশ করার নিয়ম:
আসন্ন মান সংখ্যার যে স্থান বা ঘর পর্যন্ত বলা হবে, ঠিক তার পরের ঘরের অঙ্কটা 0, 1, 2, 3, 4 হলে এই পরের অংশের অঙ্কগুলোকে সব শূন্য বলে ধরতে হবে।

কিন্তু পরের ঘরের অঙ্কটা 5, 6, 7, 8, 9 হলে আগের অঙ্কটার সাথে 1 যোগ করে নিয়ে তারপর পরের অংশের অঙ্কগুলোকে সব শূন্য বলে ধরতে হবে।

আসন্ন মানকে লেখা হয় আগে $\cong$ চিহ্ন দিয়ে।

ওপরের উদাহরণে দেখো, এই নিয়মে লক্ষ পর্যন্ত লিখতে 12 লক্ষের পরের অঙ্কটা 8 বলে আমরা 13 লক্ষ লিখেছি, কিন্তু হাজার পর্যন্ত লিখতে 84 হাজারই লিখেছি, কারণ পরের অঙ্কটা 4। আবার শত পর্যন্ত লিখতে 5 শত লিখেছি, কারণ 4 শতের পরের অঙ্কটা 8।

দশমিক সংখ্যার ক্ষেত্রেও আমরা একই নিয়মে আসন্ন মান লিখতে পারি। যেমন, 15.70825 সংখ্যাটাকে ছোট করে বিভিন্ন স্থান পর্যন্ত আসন্ন মানে লেখা যায় এইভাবে —

$15.70825 \cong 16$ $\quad$ $15.70825 \cong 15.7$ $\quad$ $15.70825 \cong 15.71$

$15.70825 \cong 15.708$ $\quad$ $15.70825 \cong 15.7083$

সাধারণ সংখ্যার ক্ষেত্রে এই নিয়মে আসন্ন মান লেখা যাবে। আমরা জানি, যে কোনও সংখ্যা লেখার নিয়মে, দুই অঙ্কের এককের ঘরের অঙ্কটা 1 থেকে 9 পর্যন্ত হলে আগের দশকের ঘরের সংখ্যাটা একই থাকে। কিন্তু তারপরে আরও 1 বেড়ে এককের ঘরেই 10 হয়ে গেলে, দশকের ঘরে 1 বাড়াতে হয় ও এককের ঘরে 0 লিখতে হয়। এই কারণে, আসন্ন মান লেখার সময় এককের ঘরে 5 বা 5-য়ের বেশি থাকলে আমরা আগের দশকের ঘরে 1 বাড়িয়ে লিখি ও এককের ঘরে 0 ধরে নিই। কিন্তু এককের ঘরে 1 থেকে 4 থাকলে আমরা আসন্ন মানে তাকে 0 ধরে নিই। এই নিয়মে তাই —

102≅ 100   107≅ 110   191≅ 190   195≅ 200।

সময়ের হিসাবে কিন্তু আসন্ন মানের নিয়মটা একটু অন্য হবে, কারণ সময়ের ক্ষেত্রে আমরা 60 ধরে মিনিট ও সেকেন্ড মাপি — 60 সেকেন্ডে 1 মিনিট ও 60 মিনিটে 1 ঘন্টা। তাই সময়ের আসন্ন মানে আমরা মিনিট বা সেকেন্ডের ঘরে 1 থেকে 29 থাকলে তাকে 0 ধরে নিতে পারি। কিন্তু মিনিটের ঘরে 30 থেকে 60 থাকলে তাকে 1 ঘন্টা ধরে আমরা মিনিটকে 0 করে নেব, আর সেকেন্ডের ঘরে 29 থেকে 60 থাকলে তাকে আমরা 1 মিনিট ধরে সেকেন্ডকে 0 করে নেব। এই নিয়মে তাই —

7 টা 22 মিনিট 29 সেকেন্ড ≅ 7 টা

8 টা 37 মিনিট 40 সেকেন্ড ≅ 8 টা 38 মিনিট ≅ 9 টা

11 টা 28 মিনিট 32 সেকেন্ড ≅ 11 টা 29 মিনিট

7 টা 29 মিনিট 30 সেকেন্ড ≅ 7 টা 30 মিনিট ≅ 8 টা

অনুশীলন 6.1

1. নিচের সংখ্যাগুলোকে লক্ষ, হাজার, ও শতকের আসন্ন মানে লেখ

প্রকৃত সংখ্যা	লক্ষে আসন্ন মান	হাজারে আসন্ন মান	শতকে আসন্ন মান
7384659	7400000	7385000	7384700
2057014			
8990991			
998765	1000000		

2. দোকানে কেনার সময় চিনি ওজন করে এল 704 গ্রাম। আসন্ন মানে ওজন কত গ্রাম দাম ধরবে?
3. একটা জিনিষের দাম লেখা আছে 799.99 টাকা। আসন্ন মানে দাম কত?
4. একটা ফিতের মাপ হল 2.79 সে.মি.। আসন্ন মানে একে কত সেমি বলবে?

5. 8 টা 22 মিনিট 37 সেকেন্ডকে মিনিটের আসন্ন মানে কটা বলবে?

6. নিচের তালিকায় আসন্ন মানগুলো লেখো

প্রকৃত সংখ্যা	পূর্ণ সংখ্যায় মান	এক দশমিক সংখ্যায় মান	দুই দশমিক সংখ্যায় মান	তিন দশমিক সংখ্যায় মান
53.7815				
27.0872				
0.6075				

6.2 আবৃত্ত দশমিক

আবৃত্ত দশমিককে ইংরেজিতে বলে রেকারিং ডেসিম্যাল (Recurring decimal) । আমরা সাধারণ ভগ্নাংশকে ভাগ করে নিয়ে দশমিক সংখ্যায় লিখতে পারি। ধরা যাক আমরা 1/2, 1/4, 1/5 ও 1/8 ভগ্নাংশগুলো দশমিকে লিখতে চাই। তাহলে ভাগটা করে নিতে হবে। ভাগটা করে আমরা কী পাই দেখো।

$$\begin{array}{r|l} & 0.5 \\ \hline 2 & 10 \\ & \underline{10} \\ & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.2 \\ \hline 5 & 10 \\ & \underline{10} \\ & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 0.25 \\ \hline 4 & 10 \\ & \underline{8} \\ & 20 \\ & \underline{20} \\ & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.125 \\ \hline 8 & 10 \\ & \underline{8} \\ & 20 \\ & \underline{16} \\ & 40 \\ & \underline{40} \\ & 0 \end{array}$$

এই চারটে ক্ষেত্রেই ভাগ শেষ করা যাচ্ছে কয়েক ধাপে। তারপর ভাগশেষ কিছু থাকছে না। এবার ভাগ করে দেখা যাক 1/3, 1/6, 1/9 ও 1/7 ভগ্নাংশগুলো ।

$$\begin{array}{r|l} & 0.3333 \\ \hline 3 & 10 \\ & \underline{9} \\ & 10 \\ & \underline{9} \\ & 10 \\ & \underline{9} \\ & 10 \\ & \underline{9} \\ & 1 \end{array}$$

ভাগফল 0.333….

$$\begin{array}{r|l} & 0.1666 \\ \hline 6 & 10 \\ & \underline{6} \\ & 40 \\ & \underline{36} \\ & 40 \\ & \underline{36} \\ & 40 \\ & \underline{36} \\ & 4 \end{array}$$

ভাগফল 0.166….

$$\begin{array}{r|l} & 0.1111 \\ \hline 9 & 10 \\ & \underline{9} \\ & 10 \\ & \underline{9} \\ & 10 \\ & \underline{9} \\ & 10 \\ & \underline{9} \\ & 1 \end{array}$$

ভাগফল 0.111….

$$\begin{array}{r|l} & 0.142857 \\ \hline 7 & 10 \\ & \underline{7} \\ & 30 \\ & \underline{28} \\ & 20 \\ & \underline{14} \\ & 60 \\ & \underline{56} \\ & 40 \\ & \underline{35} \\ & 50 \\ & \underline{49} \\ & 1 \end{array}$$

ওপরের শেষ চারটি ক্ষেত্রে আমরা দেখছি ভাগটা চলতেই থাকছে, কারণ একই ভাগশেষ বার বার ঘুরে আসছে। তাই ভাগফলে আমরা যে সংখ্যাটা পাচ্ছি তার দশমিকের পরে অসংখ্য অঙ্ক আসছে। প্রথম চারটে ভাগের ক্ষেত্রে তা হচ্ছে না — ভাগফলে দশমিকের পরে নির্দিষ্ট সংখ্যক অঙ্ক আছে।

মনে রাখো:
যেসব দশমিক সংখ্যার পরে নির্দিষ্ট সংখ্যক অঙ্ক আছে সেগুলোকে বলে **সসীম** দশমিক সংখ্যা;
যেসব দশমিক সংখ্যার পরে অসংখ্য অঙ্ক আছে সেগুলোকে বলে **অসীম** দশমিক সংখ্যা।

এবারে ওপরের চারটে ভাগফলের অসীম দশমিক সংখ্যাগুলো আরও একটু খুঁটিয়ে দেখি। দশমিক বিন্দুর পরে এক বা একাধিক সংখ্যা একই ভাবে বার বার ঘুরে আসছে। এই ধরনের দশমিক সংখ্যাকে **পৌনঃপুনিক বা আবৃত্ত** দশমিক সংখ্যা বলা হয়। আবৃত্ত দশমিক সংখ্যায় দশমিক বিন্দুর পরে যে অঙ্কটা বার বার আসছে তাকে বোঝানো হয় মাথায় একটা বিন্দু দিয়ে। একাধিক অঙ্ক নির্দিষ্ট নিয়মে বার বার এলে, তার প্রথম ও শেষ অঙ্কটার মাথায় বিন্দু (বা ওপরে একটি রেখা দিয়ে) দেওয়া হয়। এই নিয়মে আমরা লিখব—

$\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$ বলব শূন্য দশমিক 3 পৌনঃপুনিক বা আবৃত্ত

$\frac{1}{9} = 0.\dot{1}$ বলব শূন্য দশমিক 1 পৌনঃপুনিক বা আবৃত্ত

$\frac{1}{6} = 0.1\dot{6}$ বলব শূন্য দশমিক 1, ও 6 পৌনঃপুনিক বা আবৃত্ত

$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}2485\dot{7}$ বলব শূন্য দশমিক 124857 পৌনঃপুনিক বা আবৃত্ত

লক্ষ করো: কিছু আবৃত্ত দশমিক সংখ্যায় আবৃত্ত অংশটা শুরু হতে পারে দশমিক বিন্দুর পরেই, যেমন $0.\dot{3}$, বা $0.\dot{1}2485\dot{7}$। এই ধরনের আবৃত্ত দশমিককে বলে **শুদ্ধ আবৃত্ত** দশমিক। আবার কিছু আবৃত্ত দশমিক সংখ্যায় আবৃত্ত অংশটা দশমিক বিন্দুর এক বা একাধিক অঙ্কের পরে শুরু হতে পারে, যেমন $0.1\dot{6}$ । এগুলোকে বলে **মিশ্র আবৃত্ত** দশমিক।

মনে রাখো: এটা নয় যে, অসীম দশমিক সংখ্যা মানেই যে তা আবৃত্ত দশমিক হবে। কিছু <u>অসীম দশমিক সংখ্যা হতে পারে, যা আবৃত্ত দশমিক নয়</u>, যেমন 2.01001000100001. . . . .।

6.3 আবৃত্ত দশমিকের আসন্ন মান

আবৃত্ত দশমিক হল অসীম (অশেষ বা অসমাপ্ত) সংখ্যা। তাকে প্রয়োজন হলে নির্দিষ্ট সংখ্যায় প্রকাশ করতে আমরা তার আসন্ন মান নিয়ে থাকি। এর নিয়ম হল, দশমিকের পরে যে স্থানটা পর্যন্ত আসন্ন মান নিতে চাই, সেই স্থানের অঙ্কটার সাথে 1 যোগ করে লিখব ও বাকিটা কেটে দেব। উদাহরণ দেখো —

এক দশমিক পর্যন্ত আসন্ন মান	$0.\dot{3}$	$\cong 0.4$
দুই দশমিক পর্যন্ত আসন্ন মান	$0.\dot{1}$	$\cong 0.12$
তিন দশমিক পর্যন্ত আসন্ন মান	$0.1\dot{6}$	$\cong 0.167$
চার দশমিক পর্যন্ত আসন্ন মান	$0.\dot{1}2458\dot{7}$	$\cong 0.1246$

আরও দেখো, একটা সাধারণ ভগ্নাংশ সসীম দশমিক ভগ্নাংশ হবে, যদি তার **হরে আমরা মৌলিক উৎপাদক হিসাবে 2 বা 5** পাই। তা নাহলে, সাধারণ ভগ্নাংশটার হরে মৌলিক উৎপাদকে অন্য কোনও সংখ্যা থাকলে, আমরা পাই অসীম দশমিক ভগ্নাংশ। এর কারণ, হরে মৌলিক উৎপাদক 2 বা 5 হলে হরকে আমরা সহজেই প্রয়োজন মতো সংখ্যা দিয়ে গুণ করে 10, 100, বা 1000-য়ে নিয়ে যেতে পারি ও লবকেও সেই সংখ্যা দিয়ে গুণ করে ও তারপর ভাগ করে সসীম দশমিক সংখ্যা পেতে পারি। উদাহরণ—

$$\frac{3}{5} = \frac{3\text{x}20}{5\ \text{x}20} = \frac{60}{100} = 0.6; \quad \frac{11}{20} = \frac{11\text{x}5}{20\text{x}5} = \frac{55}{100}\ \ 0.55$$

অনুশীলন 6.2

1. নিচের ভগ্নাংশগুলোর মধ্যে কোনগুলো সসীম আর কোনগুলো অসীম দশমিক ভগ্নাংশ (লঘিষ্ঠ আকারে নিয়ে হরের উঁৎপাদক বিশ্লেষণ করে দেখো)— 6/13, 121/55, 11/22; 31/64; 21/35; 27/49;
2. নিচের সাধারণ ভগ্নাংশগুলোকে দশমিক সংখ্যায়, অসীম না সসীম, আবৃত্ত দশমিকে, ও তিন দশমিক পর্যন্ত আসন্ন মানে লিখে শূন্য স্থান পূরণ করো:

ভগ্নাংশ	দশমিক সংখ্যা	অসীম/সসীম	আবৃত্ত দশমিক	আসন্ন মান
$\frac{3}{7}$				
$\frac{5}{9}$				
$\frac{13}{16}$				
$\frac{11}{4}$				

3. নিচের সাধারণ ভগ্নাংশগুলোকে দশমিক সংখ্যায় নিয়ে শুদ্ধ ও মিশ্র আবৃত্ত দশমিক সংখ্যাগুলো আলাদা করে দুই ভাগে লেখো —

4/6; 6/7; 5/6; 4/15, 8/9; 5/11; 7/11; 3/13, 4/15

আবৃত্ত দশমিক সংখ্যাকে সাধারণ ভগ্নাংশে লেখা

আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা দুই রকমের হয়— শুদ্ধ ও মিশ্র । এই দুই ক্ষেত্রে পদ্ধতিটা একটু আলাদা হয়। পদ্ধতিটার মূল কাজ হল, এমন একটা পূর্ণ সংখ্যা বার করা, যা দিয়ে আবৃত্ত দশমিক সংখ্যাটাকে গুণ করলে গুণফলে দশমিকের আগে আবৃত্ত অঙ্ক বা অঙ্কগুলোকে একটা পূর্ণ সংখ্যা পাই। গুণফলের এই পূর্ণ সংখ্যাকে ওই সংখ্যা থেকে 1 কম দিয়ে ভাগ করে আমরা ভগ্নাংশটা পাব।

<u>শুদ্ধ আবৃত্ত দশমিককে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ করা</u>

উদাহরণ 1. $0.\dot{3}$-কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ করা

আমরা জানি, $0.\dot{3} = 0.3333\ldots$

সুতরাং, 10 দিয়ে দুই পাশকেই গুণ করে পাই

$0.\dot{3} \times 10 = 3.3333\ldots$

বিয়োগ করি $0.\dot{3} = 0.3333\ldots$

বিয়োগ করে পেলাম $0.\dot{3} \times 10 - 0.\dot{3} = 3$

বিচ্ছেদ নিয়মে পাই $0.\dot{3} \times (10-1) = 3$

বা, $0.\dot{3} \times 9 = 3$

সুতরাং, $0.\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

উদাহরণ 2. $0.\dot{1}4285\dot{7}$-কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ করা

আমরা জানি, $0.\dot{1}4285\dot{7} = 0.142857\ldots$

সুতরাং, 1000000 দিয়ে দুই পাশকেই গুণ করে পাই

$0.\dot{1}4285\dot{7} \times 1000000 = 142857.\dot{1}4285\dot{7}$

বিয়োগ করি $0.\dot{1}4285\dot{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$

বিয়োগ করে পাই $0.\dot{1}4285\dot{7} \times 1000000 - 0.\dot{1}4285\dot{7} = 142857$

বিচ্ছেদ নিয়মে পাই $0.\dot{1}4285\dot{7} \times (1000000-1) = 142857$

বা, $0.\dot{1}4285\dot{7} \times 999999 = 142857$

সুতরাং, $0.\dot{1}4285\dot{7} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$

ওপরের উদাহরণগুলো থেকে আমরা পাই **শুদ্ধ আবৃত্ত** দশমিককে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ করার নিয়ম:

নিয়মটা মনে রাখো:

প্রথমে দশমিক বিন্দু ও আবৃত্ত দশমিকের পৌনঃপুনিক বিন্দু তুলে দিয়ে সংখ্যাটা লিখব। এটা হবে সাধারণ ভগ্নাংশের লব।

এবার আবৃত্ত দশমিক অংশে যতগুলো অঙ্ক আছে, ততগুলো 9-কে আমরা হর হিসাবে নেব, ও তারপর ভগ্নাংশটাকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করব।

<u>মিশ্র আবৃত্ত দশমিককে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ করা</u>

উদাহরণ 3. $0.1\dot{6}$-কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ করা

আমরা জানি, $0.1\dot{6} = 0.166666\ldots$

সুতরাং, 100 দিয়ে দুই পাশকেই গুণ করে পাই

$0.1\dot{6} \times 100 = 16.666\ldots$

আবার 10 দিয়ে দুই পাশকেই গুণ করে পাই

বিয়োগ করি $\underline{0.1\dot{6} \times 10 = 1.666\ldots}$

বিয়োগ করে পেলাম $0.1\dot{6} \times 100 - 0.1\dot{6} \times 10 = 15$

বিচ্ছেদ নিয়মে পাই $0.1\dot{6} \times (100-10) = 15$

বা, $0.1\dot{6} \times 90 = 15$

সুতরাং, $0.1\dot{6} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

উদাহরণ 4. $2.37\dot{8}$-কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ করা

আমরা জানি, $2.37\dot{8} = 2.37888\ldots$

সুতরাং, 1000 দিয়ে দুই পাশকেই গুণ করে পাই

$2.37\dot{8} \times 1000 = 2378.8888\ldots$

আবার 100 দিয়ে দুই পাশকেই গুণ করে পাই

বিয়োগ করি $\underline{2.37\dot{8} \times 100 = 237.8888\ldots}$

বিয়োগ করে পেলাম $2.37\dot{8} \times 1000 - 2.37\dot{8} \times 100 = (2378-237)$

বিচ্ছেদ নিয়মে পাই $2.37\dot{8} \times (1000-100) = 2141$

বা, $2.37\dot{8} \times 900 = 2141$

সুতরাং, $2.37\dot{8} = \frac{2141}{900}$

উদাহরণ 5. $0.1\dot{8}2\dot{3}$-কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ করা

আমরা জানি, $0.1\dot{8}2\dot{3} = 0.1823823823.....$

সুতরাং, 10000 দিয়ে দুই পাশকেই গুণ করে পাই

$0.1\dot{8}2\dot{3} \times 10000 = 1823.823823..$

আবার 10 দিয়ে দুই পাশকেই গুণ করে পাই

বিয়োগ করি $\underline{0.1\dot{8}2\dot{3} \times 10 = 1.823823..}$

বিয়োগ করে পাই $0.1\dot{8}2\dot{3} \times 10000 - 0.1\dot{8}2\dot{3} \times 10 = (1823-1)$

বিচ্ছেদ নিয়মে পাই $0.1\dot{8}2\dot{3} \times (10000-10) = 1822$

বা, $0.1\dot{8}2\dot{3} \times 9990 = 1822$

সুতরাং, $0.1\dot{8}2\dot{3} = \frac{1822}{9990}$

ওপরের উদাহরণগুলো থেকে আমরা পাই **মিশ্র আবৃত্ত** দশমিককে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ করার নিয়ম।

নিয়মটা মনে রাখো:

প্রথমে দশমিক বিন্দু ও আবৃত্ত দশমিকের পৌনঃপুনিক বিন্দু তুলে দিয়ে সংখ্যাটা লিখব ও তার থেকে পৌনঃপুনিকের আগের অঙ্কটা বা অঙ্কগুলো বিয়োগ করে নেব। এটা হবে সাধারণ ভগ্নাংশের লব।

এবার আবৃত্ত দশমিক অংশে যতগুলো অঙ্ক আছে, ততগুলো 9 লিখে তার ডানপাশে বসাব দশমিক বিন্দুর পরে পৌনঃপুনিকের আগে যতগুলো অঙ্ক আছে ঠিক ততগুলো 0। এটা হবে সাধারণ ভগ্নাংশটার হর।

আবৃত্ত দশমিক সংখ্যাকে আমরা ভগ্নাংশে প্রকাশ করি কেন?

আবৃত্ত দশমিক সংখ্যাগুলোকে সরাসরি যোগ, বিয়োগ বা গুণ, ভাগ করা কঠিন। কিন্তু সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ করে নিলে আমরা তা সহজে করতে পারি।

অনুশীলন 6.3

1. নিচের আবৃত্ত দশমিক সংখ্যাগুলোকে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ করো—

a. $0.\dot{3}\dot{9}$ b. $0.\dot{5}\dot{4}$ c. $0.0\dot{2}\dot{4}$ d. $0.08\dot{1}$

e. $0.27\dot{2}$ f. $3.\dot{4}2\dot{3}$ g. $0.0\dot{1}2\dot{1}$ h. $0.01\dot{2}\dot{3}$

2. ওপরে দেওয়া a. ও b. আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা দুটো কী করে যোগ করবে বলো।

পাঠ 7. বর্গমূল

7.1 বর্গ সংখ্যার ধারণা

মনে করো, তোমার কাছে 81 টা গাছের চারা আছে। তুমি চারাগুলো এমনভাবে লাগাতে চাও, যাতে যতগুলো সারি করবে, ঠিক ততগুলোই চারা লাগাবে এক একটা সারিতে। তাহলে 81 টা চারা দিয়ে তুমি কটা সারি করবে, আর এক একটা সারিতে কটা করে চারা লাগাবে?

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								

যেহেতু কিছুদূর পর্যন্ত নামতা আমাদের মুখস্থ, তাই আন্দাজ করে বলে দিতে পারি 9 টা সারিতে 9 টা করে চারা লাগাতে হবে, কারণ 9 x 9 হলো 81। কিন্তু যদি বলা হতো, 4489 টা চারা আছে, তাহলে উত্তরটা এত সহজে বার করতে পারবে না। এটা কী করে বলা যায়, সেটাই এখন শিখব।

এখানে 9-য়ের বর্গ হল 81। বর্গ বলা হয় কেন বুঝতে আমাদের জ্যামিতির একটা ধারণা ব্যবহার করতে হবে। আমরা জানি, চতুর্ভুজের চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান হলে তাকে বর্গক্ষেত্র বা ইংরেজিতে স্কোয়ার (Square) বলে। আর জানি, বাহুর দৈর্ঘ্য যদি ধরি a, তাহলে বর্গক্ষেত্রটার ক্ষেত্রফল হয়, দুটি বাহুর গুণফল, a x a, যাকে লেখা হয়, a^2 ও বলা হয়, a স্কোয়ার বা a বর্গ ।

মনে রাখো:

1. কোনও সংখ্যাকে সেই সংখ্যা দিয়েই গুণ করলে যে গুণফল পাই, তাকে বলে ওই সংখ্যার **বর্গ**।
2. যে সংখ্যাকে দুবার গুণ করে গুণফল বা বর্গসংখ্যাটা পাওয়া গেল, সেই সংখ্যাটা হল ওই বর্গসংখ্যাটার **বর্গমূল** (Square root) ।
3. **পূর্ণবর্গ সংখ্যা**র বর্গমূল হিসাবে আমরা একটি অখণ্ড বা পূর্ণ সংখ্যা পাই।

উদাহরণ লক্ষ করো —

পূর্ণবর্গ সংখ্যা $9 = 3 \times 3 = 3^2$ (3 স্কোয়ার বা 3-য়ের বর্গ); 9-এর বর্গমূল, 3 ।

পূর্ণবর্গ সংখ্যা $16 = 4 \times 4 = 4^2$ (4 স্কোয়ার বা 4-য়ের বর্গ); 16-র বর্গমূল, 4 ।

কোনও সংখ্যার বর্গমূল বার করাকে লেখা হয় ওই সংখ্যাটাতে $\sqrt{}$ চিহ্ন দিয়ে। তাই আমরা লিখব, $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{169} = \sqrt{13 \times 13} = 13$ ।

কয়েকটা পূর্ণবর্গ সংখ্যা ও বর্গমূলের তালিকা

পূর্ণবর্গ		বর্গমূল	পূর্ণবর্গ		বর্গমূল	পূর্ণবর্গ		বর্গমূল
1=	1x1	1	64=	8x8	8	225=	15x15	15
4=	2x2	2	81=	9x9	9	256=	16x16	16
9=	3x3	3	100=	10x10	10	289=	17x17	17
16=	4x4	4	121=	11x11	11	324=	18x18	18
25=	5x5	5	144=	12x12	12	361=	19x19	19
36=	6x6	6	169=	13x13	13	400=	20x20	20
49=	7x7	7	196=	14x14	14	441=	21x21	21

পূর্ণবর্গ সংখ্যা ও তার বর্গমূলের কয়েকটা বিশেষত্ব

নিচের সারণিতে অখণ্ড সংখ্যার একক ঘরের অঙ্ক ও বর্গসংখ্যার একক ঘরের অঙ্ক লক্ষ করো —

এককে আছে	অখণ্ড সংখ্যা	বর্গ সংখ্যা	এককে আছে
0	10, 20, 30, …70,…	100, 400, 900, …. 4900,...	0
1	11, 21, 31, …91,…	121, 441, 961, …. 8281,…	1
2	8, 12, 22, ... 32,…	64,144, 484, … 1024,...	4
3	13, 23, 33, …83,…	169, 529, 1089,… 6889,..	9
4	14, 24, 34, …64,…	196, 576, 1156, ... 4096,…	6
5	15, 25, 35, …75,…	225, 625, 1225,.. 5625,..	5
6	4,16, 26, … 36,…	16, 256, 676, … 1296,...	6
7	17, 27, 37, …87,…	289, 729, 1369,.. 7569,…	9
8	18, 28, 38, …68…	334, 784, 1444, .. 4624,..	4
9	19, 29, 39, …99,,..	361, 841, 1521, .. 9801,..	1

মনে রাখো:

1. পূর্ণবর্গ সংখ্যার এককের ঘরে 2, 3, 7, 8 পাই না;
2. পূর্ণবর্গ সংখ্যার এককের ঘরে 0 থাকলে বর্গমূলের এককের ঘরে 0 থাকে;
3. পূর্ণবর্গ সংখ্যার এককের ঘরে 1 থাকলে বর্গমূলের এককের ঘরে 1 বা 9;
4. পূর্ণবর্গ সংখ্যার এককের ঘরে 4 থাকলে বর্গমূলের এককের ঘরে 2 বা 8;
5. পূর্ণবর্গ সংখ্যার এককের ঘরে 5 থাকলে বর্গমূলের এককের ঘরে 5 থাকে;
6. পূর্ণবর্গ সংখ্যার এককের ঘরে 6 থাকলে বর্গমূলের এককের ঘরে 4 বা 6;
7. পূর্ণবর্গ সংখ্যার এককের ঘরে 9 থাকলে বর্গমূলের এককের ঘরে 3 বা 7;

আরও একটি বিশেষত্ব মনে রেখো —

8. অখণ্ড সংখ্যাটাতে যেকটা অঙ্ক থাকে, বর্গসংখ্যায় তার দ্বিগুণ বা দ্বিগুণের থেকে এক কম অঙ্ক থাকে। অর্থাৎ, অখণ্ড সংখ্যাটাতে 3টে অঙ্ক থাকলে তার বর্গসংখ্যায় থাকবে 6 অথবা 5টা অঙ্ক। যেমন, $289^2 = 83521$, বা $587^2 = 344569$। সুতরাং, পূর্ণবর্গ সংখ্যার অঙ্কসংখ্যা যদি জোড় হয়, তাকে 2 দিয়ে ভাগ করে বর্গমূলের অঙ্কসংখ্যা পাই; বিজোড় হলে 1 যোগ করে নিয়ে 2 দিয়ে ভাগ করে বর্গমূলের অঙ্কসংখ্যা পাই।

7.2 পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূল বার করা — মৌলিক গুণনীয়ক পদ্ধতি

এই পদ্ধতি দিয়ে আমরা দুটো কাজ করতে পারব —

1. পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূল বার করা;
2. একটি সংখ্যা পূর্ণবর্গ কিনা দেখা ও পূর্ণবর্গ না হলে বলা, ন্যূনতম কত দিয়ে গুণ অথবা ভাগ করলে পূর্ণবর্গ সংখ্যা পাব।

পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূল বার করা

16 সংখ্যাটাকে মৌলিক গুণনীয়কে ভেঙে লিখতে পারি—

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

আমরা যেসব মৌলিক গুণনীয়ক পেলাম, তাদেরকে জোড়ায় জোড়ায় লিখব,

$= (2 \times 2) \times (2 \times 2)$

তারপর প্রতি জোড়াকে একটি গুণনীয়ক হিসাবে নিলে আমরা বর্গমূল পাই,

$\sqrt{16} = (2) \times (2) = 4$ ।

36 সংখ্যাটাকে মৌলিক গুণনীয়কে ভেঙে লিখতে পারি—

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

আমরা যেসব মৌলিক গুণনীয়ক পেলাম, তাদেরকে জোড়ায় জোড়ায় লিখব,

$= (2 \times 2) \times (3 \times 3)$

তারপর প্রতি জোড়াকে একটি গুণনীয়ক হিসাবে নিলে আমরা বর্গমূল পাই,

$\sqrt{36} = (2) \times (3) = 6$ ।

পদ্ধতিটা মনে রাখো:

1. প্রথমে সংখ্যাটাকে মৌলিক গুণনীয়কে ভেঙে লেখো;
2. মৌলিক গুণনীয়কগুলোকে জোড়ায় জোড়ায় পর পর সাজিয়ে লেখো;
3. প্রতি জোড়া থেকে একটা করে গুণনীয়ক নিয়ে লেখো;
4. এই গুণনীয়কগুলোকে গুণ করে সংখ্যাটার বর্গমূল পাবে।

উদাহরণ 1. মৌলিক গুণনীয়ক পদ্ধতিতে 3136 এর বর্গমূল বের করো ।

সমাধান:

$$\begin{array}{r|r}
2 & 3136 \\ \hline
2 & 1568 \\ \hline
2 & 784 \\ \hline
2 & 392 \\ \hline
2 & 196 \\ \hline
2 & 98 \\ \hline
7 & 49 \\ \hline
 & 7
\end{array}$$

সুতরাং, মৌলিক গুণনীয়কে ভেঙে,

$$\begin{aligned} 3136 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \\ &= (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (7 \times 7) \end{aligned}$$

অতএব, 3136 এর বর্গমূল,

$$\sqrt{3136} = (2) \times (2) \times (2) \times (7) = 56 \text{ ।}$$

উদাহরণ 2. মৌলিক গুণনীয়ক পদ্ধতিতে 44100 এর বর্গমূল বের করো ।

সমাধান:

$$\begin{array}{r|r}
2 & 44100 \\ \hline
2 & 22050 \\ \hline
3 & 11025 \\ \hline
3 & 3675 \\ \hline
5 & 1225 \\ \hline
5 & 245 \\ \hline
7 & 49 \\ \hline
 & 7
\end{array}$$

সুতরাং, মৌলিক গুণনীয়কে ভেঙে,

$$\begin{aligned} 44100 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \\ &= (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (5 \times 5) \times (7 \times 7) \end{aligned}$$

অতএব, 44100 এর বর্গমূল,

$$\sqrt{44100} = (2) \times (3) \times (5) \times (7) = 210 \text{ ।}$$

অনুশীলন 7.1 মৌলিক গুণনীয়ক পদ্ধতিতে বর্গমূল বার করো,

4356, 8281, 38025, 207936।

উত্তর: মিলিয়ে দেখে নাও, 66, 91, 195, 456।

একটি সংখ্যা পূর্ণবর্গ কিনা দেখা, ও পূর্ণবর্গ না হলে বলা, ন্যূনতম কোন অখণ্ড সংখ্যা দিয়ে গুণ অথবা ভাগ করলে পূর্ণবর্গ সংখ্যা পাব

যেকোনও সংখ্যাকে তার মৌলিক গুণনীয়ক বা উৎপাদকগুলোতে ভেঙে লেখা যায়। বর্গমূল বার করার পদ্ধতিতে দেখলাম যে পূর্ণবর্গ সংখ্যায় মৌলিক গুণনীয়কগুলোর সবকটাই জোড়ায় জোড়ায় থাকে।

> মনে রাখো:
> কোনও সংখ্যার মৌলিক গুণনীয়কগুলোতে যদি কোনও মৌলিক গুণনীয়ক বিজোড় থাকে, তাহলে সেই সংখ্যা পূর্ণবর্গ হয় না।

উদাহরণ 3. বিশ্লেষণ করে বলো, 18 সংখ্যাটা পূর্ণবর্গ কিনা।

$$\begin{array}{r|l} 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

18-কে মৌলিক গুণনীয়কে ভেঙে লিখলে পাই

$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times (3 \times 3)$

এখানে মৌলিক গুণনীয়ক, 3 জোড় সংখ্যায় আছে, কিন্তু 2 বিজোড় সংখ্যায় আছে । সুতরাং 18 পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়।

এবার লক্ষ করো, যেহেতু 2 বিজোড়ে আছে বলে সংখ্যাটা পূর্ণবর্গ হচ্ছে না, তাই 18 সংখ্যাটাকে 2 দিয়ে একবার গুণ করে নিলেই আমরা 2-কে জোড়ে পাব। কারণ, তাহলে আরও একটা 2 মৌলিক গুণনীয়ক হিসাবে পেয়ে যাব। অর্থাৎ, এখানে 2 দিয়ে গুণ করে নিলে আমরা একটা পূর্ণবর্গ সংখ্যা পাব,

$18 \times 2 = (2 \times 2) \times (3 \times 3) = 36$ একটা পূর্ণবর্গ সংখ্যা ।

আবার দেখো, বিজোড় 2-টাকে যদি আমরা বাদ দিতে পারি, তাহলেও একটা পূর্ণবর্গ সংখ্যা পাই। এটা করা যাবে 2 দিয়ে ভাগ করলে। অর্থাৎ, 2 দিয়ে ভাগ করে আমরা পাই,

$18 \div 2 = (2 \div 2) \times (3 \times 3) = 9$ একটা পূর্ণবর্গ সংখ্যা ।

> মনে রাখো: কোনও সংখ্যার মৌলিক গুণনীয়কগুলোর যেটা বিজোড় সংখ্যায় আছে, সেটা দিয়ে সংখ্যাটাকে গুণ অথবা ভাগ করলে আমরা গুণফল অথবা ভাগফলকে একটা পূর্ণবর্গ সংখ্যায় পাই।

অনুশীলন 7.2 পরীক্ষা করে বলো এই সংখ্যাগুলো পূর্ণবর্গ কিনা। পূর্ণবর্গ না হলে সবচেয়ে ছোট কোন্ অখন্ড বা পূর্ণ সংখ্যা দিয়ে গুণ বা ভাগ করলে আমরা পূর্ণবর্গ সংখ্যা পাবো—

162, 432, 845, 588 ।

মৌলিক গুণনীয়ক বা উৎপাদক দিয়ে বর্গমূল বার করার পদ্ধতিটার প্রয়োগ করে অঙ্কের কিছু বিশেষ সমস্যার সমাধান কী করে করা যায় তার উদাহরণ দেখব।

উদাহরণ 4. রাজুর কাছে কয়েকটা কাঁচের গুলি আছে। সেগুলো সে বর্গাকারে সাজিয়ে রাখতে চেষ্টা করে দেখল, প্রতি স্তম্ভে ও প্রতি সারিতে 12টা করে বল সাজালে 6 টা বল পড়ে থাকে। রাজুর কাছে মোট কটা বল ছিল?

সমাধান: 12 টা করে বর্গাকারে সাজালে মোট লাগে 12^2 বা 12 x 12 = 144টা। সুতরাং, রাজুর কাছে ছিল 144+6 = 150টা কাঁচের গুলি।

উদাহরণ 5. মিতার কাছে 452 টা কাঁচের গুলি আছে। সেগুলোকে সে বর্গ ক্ষেত্রের আকারে স্তম্ভ ও সারিতে সমান সংখ্যায় সাজাতে গিয়ে দেখল 11 টা কাঁচের গুলি বেশি আছে। মিতার সাজানোয় প্রতি সারি ও স্তম্ভে কটা করে কাঁচের গুলি আছে?

সমাধান: 11 টা কাঁচের গুলি সাজানোয় রাখা যায়নি। সুতরাং বর্গাকারে সাজানো হয়েছে 452–11= 441 টা কাঁচের গুলি। তাহলে প্রতি সারি বা স্তম্ভে কটা করে কাঁচের গুলি আছে জানতে আমাদের 441-য়ের বর্গমূল বার করতে হবে।

3	441	441- কে মৌলিক গুণনীয়কে ভেঙে আমরা পাই,
3	147	441= (3 x 3) x (7 x 7)
7	49	সুতরাং, 441-য়ের বর্গমূল 3 x 7= 21
7	7	মিতার সাজানোয় প্রতি সারি ও স্তম্ভে 21টা করে
	1	কাঁচের গুলি আছে।

উদাহরণ 6. মিলি 220 টা কাঁচের গুলি বর্গাকারে সাজাতে গিয়ে দেখল 5 টা গুলি কম পড়ছে। হিসেব করে বলো, মিলি প্রতি সারিতে কটা করে গুলি রেখেছে।

সমাধান: যদি মিলির আরও 5 টা কাঁচের গুলি থাকত, তাহলে ওর মোট কাঁচের গুলি হত 220+5= 225 টা। 225টা গুলিকে বর্গাকারে সাজালে প্রতি সারি ও স্তম্ভে গুলির সংখ্যা হবে 225-র বর্গমূল।

5	225	225- কে মৌলিক গুণনীয়কে ভেঙে আমরা পাই,
5	45	225= (5 x 5) x (3 x 3)
3	9	সুতরাং, 225-য়ের বর্গমূল 5 x 3= 15
3	3	মিলির সাজানোয় প্রতি সারি ও স্তম্ভে 15টা করে
	1	কাঁচের গুলি আছে।

উদাহরণ 7. আমরা 5 জন বন্ধু মিলে ঠিক করলাম, প্রত্যেকেই আমাদের সংখ্যা যত ঠিক ততগুলো করে খাবারের প্যাকেট নেব, মানে 5টা করে। এক একটা প্যাকেটে 1 টা করে কলা আর 2 টা করে সন্দেশ থাকবে। মোট কটা কলা আর সন্দেশ লাগবে বলো।

সমাধান: এখানে 5 জন প্রত্যেকে 5 টা করে প্যাকেট পাবে। সুতরাং মোট প্যাকেটের সংখ্যা আমরা পাবো 5-য়ের বর্গ করে, অর্থাৎ $5^2 = 5x5=125$।
তাহলে, কলা লাগবে 125 টা ও সন্দেশ লাগবে $125 \times 2 = 250$ টা।

উদাহরণ 8. বন্ধুরা মিলে কলা আর কমলালেবু নিয়ে এল। যতজন বন্ধু ছিল তার প্রত্যেকে ততগুলো করে কলা আর তার দ্বিগুণ করে কমলালেবু পেল। কলা ও কমলালেবু মিলে মোট 192টা হলে বলো মোট কতজন বন্ধু ছিল।
সমাধান: 1 টা কলা ও তার দ্বিগুণ 2 টা কমলালেবু নিয়ে এক এক জনের ভাগ হলে মোট ভাগ বা প্যাকেট হবে $192 \div 3 = 64$ ভাগ। বন্ধুর সংখ্যা যতজন, প্রত্যেকে ঠিক ততগুলো করে প্যাকেট পেলে বন্ধুর সংখ্যা হবে 64-র বর্গমূল বা $\sqrt{64} = 8$ জন। প্রত্যেকে পেল 8টা করে প্যাকেটে মোট 8 করে কলা আর 16টা করে কমলালেবু।

অনুশীলন 7.3

1. মনে মনে হিসেব করে বল—

   a) $7^2 =$ b) $\sqrt{100} =$ c) $9^2 =$ d) $\sqrt{121} =$

   e) $\sqrt{2x3x2x3} =$ f) $\sqrt{5^2 \times 3^2} =$ g) $\sqrt{12 \times 12} =$

2. 256টা আম এমনভাবে ঝুড়িতে রাখো, যাতে যতগুলো ঝুড়ি আছে তার প্রত্যেকটাতে ঠিক ততগুলো আম থাকে। মোট কটা ঝুড়িতে আম রাখবে?
3. আলমারিতে যতগুলো তাক আছে, প্রতি তাকে ঠিক ততগুলো করে বই রাখার পর 6টা বই বাকি রয়ে গেল। মোট বই ছিল 70টা। হিসেব করে বল আলমারিতে কটা তাক ছিল।
4. গ্রামের রাস্তা মেরামতের কাজে যত জন কাজে লেগেছিল তারা ঠিক ততদিন করে কাজ করে মোট 28000 টাকা রোজগার করল। এক একজনের দৈনিক রোজগার 70 টাকা হলে মোট কতজন কাজে এসেছিল বলো ।
5. বন্ধুরা মিলে খেলার মাঠ পরিষ্কার ও তারপর একসাথে খাবে বলে নিজেরাই টাকা জমা করল। যতজন বন্ধু আছে প্রত্যেকে ততগুলো 2 টাকা করে চাঁদা দিল। মোট 288 টাকা উঠল। কতজন বন্ধু ছিল হিসেব করে বলো ।

6. ক্লাবের লাইব্রেরির বই কেনার জন্য প্রত্যেক সদস্য টাকা দিল মোট যতজন সদস্য তার তিনগুণ করে। মোট টাকা উঠল 3072। ক্লাবের মোট সদস্য সংখ্যা কত বলো ।
7. আমার একটা বর্গাকার বাক্স আছে। প্রতি খোপে 2 টা 1 টাকা, 1 টা 2 টাকা, ও 1 টা 5 টাকার মুদ্রা রাখলাম। এতে আমার মোট 1296 টাকা লেগে গেল। হিসেব করে বলো বাক্সের প্রতি সারিতে কটা করে খোপ আছে।

উত্তর 7.3

2.	3.	4	5.	6.	7.	8.	9.
16টা ঝুড়ি	8টা তাক	20জন	12জন	32জন	8জন	15জন	12টা খোপ

একাধিক সংখ্যা দিয়ে ভাগ যায় এমন ক্ষুদ্রতম পূর্ণবর্গ সংখ্যা বের করা

আমরা জানি, একাধিক সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা যায় এমন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা হল ওই সংখ্যাগুলোর লসাগু। এই সংখ্যাটা পূর্ণবর্গ সংখ্যা নাও হতে পারে। সেক্ষেত্রে সংখ্যাটাকে ন্যূনতম সংখ্যা দিয়ে গুণ করে পূর্ণবর্গ করে নিতে হবে, যা আমরা করতে শিখেছি আগের অনুচ্ছেদে।

উদাহরণ 9. ক্ষুদ্রতম পূর্ণবর্গ সংখ্যা বের করো, যেটা 25, 40 ও 60 দিয়ে বিভাজ্য (ভাগ করা যায়)।

আমরা 25, 45 ও 60-য়ের লসাগু বার করব।
এখানে লসাগু পাই—

$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$
$= 2^2 \times 5^2 \times 2 \times 3$

এখানে লসাগু সংখ্যাটা পূর্ণবর্গ নয়।

$$
\begin{array}{r|rrr}
2 & 25 & 40 & 60 \\ \hline
2 & 25 & 20 & 30 \\ \hline
2 & 25 & 10 & 15 \\ \hline
3 & 25 & 5 & 15 \\ \hline
5 & 25 & 5 & 5 \\ \hline
 & 5 & 1 & 1
\end{array}
$$

পূর্ণবর্গ করে নিতে আমাদের গুণ করতে হবে একটা 2 ও একটা 3 দিয়ে। সুতরাং, 25, 40 ও 60 দিয়ে বিভাজ্য ক্ষুদ্রতম পূর্ণবর্গ সংখ্যা হল $2^2 \times 5^2 \times 2^2 \times 3^2 = 3600$ ।

উদাহরণ 10. ইস্কুলের বার্ষিক অনুষ্ঠানে ছাত্রছাত্রীদের দাঁড় করানো হল বিভিন্নভাবে। সারিতে 12, 15 ও 20 জন করে এক একবার, ও তারপর বর্গাকারেও দাঁড় করানো হল। মোট কত ছাত্রছাত্রী ছিল?

এখানে আমাদের 12, 15 ও 20, সংখ্যা তিনটের লসাগু বার করতে হবে ও দেখতে হবে লসাগু সংখ্যাটা পূর্ণবর্গ কিনা। না হলে তাকে পূর্ণবর্গ করে নিতে হবে।

2	12	15	20
2	6	15	10
3	3	15	5
5	1	5	5
	1	1	1

এখানে লসাগু হল $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ । দেখা যাচ্ছে সংখ্যাটা পূর্ণবর্গ নয়। তাই 60 জনকে বর্গাকারে সাজানো যায় না। পূর্ণবর্গ করে নিতে আমাদের গুণ করতে হবে একটা 3 ও একটা 5 দিয়ে।

সুতরাং, ছাত্রছাত্রীদের সংখ্যা হল $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 900$ জন ।

উদাহরণ 11. দুটো সংখ্যার গুণফল 324 ও বড় সংখ্যাটাকে ছোট সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে পাই 4। সংখ্যা দুটো কী কী বার করো।

মনে করি, বড় সংখ্যাটা হল x আর ছোট সংখ্যাটা হল y। বলে দেওয়া আছে–

$x.y = 324$ ও $\frac{x}{y} = 4$

সুতরাং, এই দুটোকেই গুণ করে আমরা পাই,

$x.\cancel{y} \times \frac{x}{\cancel{y}} = 324 \times 4 = 1296$

অথবা, $x^2 = 1296$ । সুতরাং, $x = \sqrt{1296} = 36$ ।

এবারে দেখি, $x.y = 324$ মানে হল $36.y = 324$। অতএব, $y = 324 \div 36 = 9$।

অনুশীলন 7.4

1. বার করো, কোন ক্ষুদ্রতম পূর্ণবর্গ সংখ্যাকে 12, 16, 20, 24 দিয়ে ভাগ করা যায়। এই সংখ্যাগুলো দিয়ে বিভাজ্য এর পরের পূর্ণবর্গ সংখ্যা কোন্টা হবে? [সমাধান সূত্র: পরের পূর্ণবর্গ সংখ্যাটা বার করতে গুণ করো 2×2 বা 4 দিয়ে]
2. দুটো সংখ্যার গুণফল 72 আর বড় সংখ্যাটাকে ছোট সংখ্যাটা দিয়ে ভাগ করে পাই 2। সংখ্যা দুটো বার করো।
3. তিনটে সংখ্যার প্রথম ও দ্বিতীয়টার গুণফল 24, দ্বিতীয় ও তৃতীয়টার গুণফল 48, আর প্রথম ও তৃতীয়টার গুণফল 32। সংখ্যা তিনটে বার করো। [সমাধান সূত্র: $xy=24$, $yz=48$, $xz=32$। সুতরাং, $yz \div xy = 48 \div 24$ বা, $z \div x = 2$। অতএব, $(z \div x) \times xz = 2 \times 32$ বা, $z^2 = 64$]
4. ছাত্রদের এক একবার সারিতে 18, 24, ও 27 জন করে দাঁড়াতে বলা হল। তারপর তাদেরকে বর্গাকারেও দাঁড় করানো হল। ছাত্র সংখ্যা কমপক্ষে মোট কত বের করো।
5. ছাত্রদের এক একবার সারিতে 12, 15, ও 20 জন করে দাঁড়াতে বলা হল। তারপর তাদেরকে বর্গাকারেও দাঁড় করানো হল। ছাত্র সংখ্যা কমপক্ষে মোট কত বের করো।

6. দুটো সংখ্যার গুণফল 147 ও বড় সংখ্যাটাকে ছোট সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে হয় 3। সংখ্যা দুটো বার করো।

উত্তর 7.4

1.	2.	3.	4.	5.	6.
3600	12, 6	4, 6, 8	1296	900	21, 7

7.3 ভাগ করে যেকোনও সংখ্যার বর্গমূল বার করা

যেকোনও সংখ্যারই বর্গমূল বার করা যায়, অর্থাৎ, এমন একটি সংখ্যা পাওয়া যাবে, যার বর্গ করলে (মানে দুবার গুণ করলে) আমরা ওই সংখ্যাটা পাব। ভাগ করে বর্গমূল করার পদ্ধতিটা দুই ধরনের সংখ্যা নিয়ে শিখব — অখণ্ড সংখ্যা আর দশমিক ভগ্নাংশের সংখ্যা। মনে রাখতে হবে, একমাত্র পূর্ণবর্গ সংখ্যার ক্ষেত্রেই আমরা অখণ্ড সংখ্যায় বর্গমূল পাব। তা না হলে আমরা অখণ্ড বর্গমূল সংখ্যাটা পাব দশমিক ভগ্নাংশে, বা কয়েকটা দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মানে।

ভাগ পদ্ধতিতে অখণ্ড সংখ্যার বর্গমূল বার করা

উদাহরণ 12. বর্গমূল বের করো — 2304।

ধাপ 1. 2304-কে ভাজ্য ধরে এককের ঘর থেকে শুরু করে বাঁদিকের প্রতি জোড়া অঙ্কের ওপরে দাগ দিয়ে রাখো। এখানে চারটে অঙ্ক বা দুই জোড়া অঙ্ক আছে। বিজোড় হলে বাঁদিকের শেষ ঘরটার অঙ্কটা জোড়ায় আসবে না। এটা আমরা পরের উদাহরণে দেখব। এখানে আমরা দাগ দিয়ে নিলাম $\overline{23}\ \overline{04}$।

ধাপ 2. বাঁদিকে ভাগ করার ভাজক সংখ্যাটা লেখার জন্য উল্লম্ব রেখা দিয়ে তার পাশে সংখ্যাটা লিখব। এবার ভাজ্য সংখ্যাটার ওপরেও সমান্তরাল রেখা দিয়ে রাখব ভাগফল লেখার জন্য [*সংখ্যার ডান পাশে উল্লম্ব রেখা দিয়ে ভাগফল লেখার জায়গা রাখাও যেতে পারে । কোনও কোনও বইয়ে এভাবেও লেখা হয়।*]

$$\begin{array}{l|l} & \\ \hline & \overline{23}\ \overline{04} \end{array}$$

ধাপ 3. এবারে ভাগ করা। সর্বদা এক জোড়া করে অঙ্ক নিয়ে ভাগ করব। প্রথম জোড়াটা হল 23। ভাজক হিসাবে এমন একটা সংখ্যা নিতে হবে যার বর্গ করলে আমরা 23 বা 23-য়ের কম সবচেয়ে কাছের সংখ্যা পাব। আমরা জানি $5^2=25$ হল 23-য়ের থেকে বড়। তাই 4 দিয়ে ভাগ করব। অর্থাৎ, 23-য়ের সবচেয়ে কাছের বর্গসংখ্যা 16-র বর্গমূল 4-কে ভাজকের জায়গায় ও ভাগফলের জায়গায় লিখব, আর 23-য়ের নিচে লিখব 16। এই ধাপে বিয়োগ করে নিচে ভাগশেষ লিখব 7।

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 4 & \overline{23}\ \overline{04} \\ & 16 \\ \hline & \ 7 \end{array}$$

ধাপ 4. এবারে পরের জোড়া অঙ্ক দুটো, 04-কে, নিচে নামিয়ে ভাগশেষের পাশে লিখব। এবার ভাগ করব 704-কে। ভাগ করার জন্য আগের ধাপে পাওয়া ভাগফল, 4-কে দ্বিগুণ করে নিয়ে ভাজকের জায়গায় নামিয়ে লিখব 8, পাশে একটু জায়গা রেখে, যাতে আর একটা অঙ্ক বসানো যায়।

```
    |  4
 4  | 23 04
    | 16
 8  |  7 04
```

ধাপ 5. এবারে এমন একটা একক সংখ্যা নিতে হবে যাকে 8-য়ের পাশে লিখে ওই সংখ্যাটা দিয়েই গুণ করলে 704 বা তার কম সবচেয়ে কাছের সংখ্যা পাওয়া যাবে। আমরা জানি 8x9 হল 72, তাই এই এই সংখ্যাটা 9 হবে না। আমরা 8 নিয়ে দেখি। 88x8 হল 704। তাই এই সংখ্যাটা হল 8। একে ভাজকে 8-য়ের পাশে লিখে পাব 88 আর ভাগফলেও 4-য়ের পাশে লিখে পাব 48। এখানে আর কোনও ভাগশেষ থাকল না। তাই 2304 হল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা। উত্তর: 2304 একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা যার বর্গমূল হল 48।

```
    |  4 8
 4  | 23 04
    | 16
 88 |  7 04
       7 04
          0
```

উদাহরণ 13. বর্গমূল বের করো — 31684।

এখানে সংখ্যাটার ডানদিক থেকে নিয়ে এক এক জোড়া অঙ্কের ওপরে দাগ দিয়ে নিলে বাঁদিকে একটা অঙ্ক বাকি থেকে যায়, কারণ অঙ্ক আছে বিজোড় সংখ্যায়, $3\ \overline{16}\ \overline{84}$। এবারে একই পদ্ধতিতে ধাপে ধাপে ভাগ করতে হবে।

ধাপ 1. ভাগ করতে হবে একক সংখ্যা 3-কে নিয়ে। এখানে সবচেয়ে কাছের বর্গসংখ্যা 1। তাই আমরা ভাজক ও ভাগফলে 1 লিখে নেব ও 3 থেকে 1 বিয়োগ করে ভাগশেষ পাব 2।

```
    | 1
 1  | 3 16 84
    | 1
 2  | 2 16
```

ধাপ 2. এবারে পরের জোড়া অঙ্ক দুটো, 16-কে, নিচে নামিয়ে ভাগশেষের পাশে লিখব। এবার ভাগ করব 216-কে । ভাগ করার জন্য আগের ধাপে পাওয়া ভাগফল, 1-কে দ্বিগুণ করে নিয়ে ভাজকের জায়গায় নামিয়ে লিখব 2, পাশে একটু জায়গা রেখে, যাতে আর একটা অঙ্ক বসানো যায়।

ধাপ 3. এবার 216-কে ভাগ করব 2-য়ের পাশে এমন একটা সংখ্যা বসিয়ে ভাজক হিসাবে নিয়ে, যাতে ওই সংখ্যাটাকেই ভাগফল হিসাবে পাই। আন্দাজ করে দেখো, এই সংখ্যাটা হবে 7। কারণ 28x8 হয়ে যায় 224, আর 27x7 পাই 189।

```
    | 1 7
 1  | 3 16 84
    | 1
 27 | 2 1 6
      1 8 9
        2 7
```

এখানে ভাজকে 2-য়ের পাশে 7 বসিয়ে ও ভাগফলে 7 লিখে এই ধাপে ভাগশেষ থাকল 27।

ধাপ 4. এবারে পরের জোড়া অঙ্ক দুটো, 84-কে, নিচে নামিয়ে ভাগশেষের পাশে লিখব। এবার ভাগ করব 2784-কে । ভাগ করার জন্য আগের ধাপে পাওয়া ভাগফল, 17-কে দ্বিগুণ করে নিয়ে ভাজকের জায়গায় নামিয়ে লিখব 34, পাশে একটু জায়গা রেখে, যাতে আর একটা অঙ্ক বসানো যায়। আন্দাজ করে দেখো, এই অঙ্কটা 8 হতে পারে কারণ 3x8 হল 24 যা ভাজ্যের 27-য়ের থেকে কম। 348x8 করে পাই 2 7 84 । সুতরাং, ভাগশেষ কিছু থাকে না।

```
      1  7  8
1   | 3 16 84
    | 1
27  | 2 1 6
    | 1 8 9
348 |   2 7 84
    |   2 7 84
           0
```

উত্তর: 31684 একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা যার বর্গমূল হল 178।

পূর্ণবর্গ নয় এমন সংখ্যার সাথে ন্যূনতম কত বিয়োগ বা যোগ করে পূর্ণবর্গ করে নেওয়া যায়

উদাহরণ 14. ন্যূনতম কত বিয়োগ করলে 8655 থেকে পূর্ণবর্গ সংখ্যা পাই।

ভাগ পদ্ধতিতে দুটো ধাপে ভাগ করে আমরা ভাগশেষ পাই 6। সুতরাং, 8655 থেকে 6 বিয়োগ করে আমরা পাব 8649, যা একটা পূর্ণবর্গ সংখ্যা ও তার বর্গমূল হল 93।

```
      9  3
9   | 86 55
    | 81
183 |  5 55
       5 49
          6
```

উদাহরণ 15. ন্যূনতম কত যোগ করে 651201-কে পূর্ণবর্গ করে নেওয়া যায়।

দ্বিতীয় ধাপটা লক্ষ্য করো। 16-র পরে কোনও সংখ্যা বসিয়ে তাকে সেই সংখ্যাটা দিয়ে গুণ করে 112-কে ভাগ করা যাচ্ছে না। তাই আমরা ভাজকে 16-র পরে 0 বসিয়েছি ও ওপরে ভাগফলেও 0 লিখেছি। তৃতীয় ধাপের শেষে আমরা বর্গমূলে পাচ্ছি 806 ও ভাগশেষ থেকে যাচ্ছে 1565। তাই 651201 সংখ্যাটা পূর্ণবর্গ নয়।

```
       8  0  6
8    | 65 12 01
     | 64
160  |  1 12
     |  0 00
1606 |  1 12 01
     |    96 36
          15 65
```

সুতরাং, এই সংখ্যাটার সাথে কোনও সংখ্যা যোগ করে নিয়ে ন্যূনতম যে পূর্ণবর্গ সংখ্যা পাওয়া যাবে তার বর্গমূল হবে 806+1=807। এই পূর্ণবর্গ সংখ্যাটা হবে $807^2 = 651249$ । অতএব, 651201-য়ের সঙ্গে আমাদের যোগ করতে হবে 651289 – 651201= 48 ।

উদাহরণ 16. বার করো, 2000-য়ের সবচেয়ে কাছের পূর্ণবর্গ সংখ্যা কোনটা।

আমরা প্রথমে বর্গমূল বার করার ভাগ পদ্ধতিতে দেখব, নূন্যতম কত বিয়োগ ও যোগ করে আমরা পূর্ণবর্গ সংখ্যা পেতে পারি। এই বিয়োগফল ও যোগফলের মধ্যে যেটা ছোট হবে তার থেকে পাওয়া পূর্ণবর্গ সংখ্যাটাই 2000-য়ের সবচেয়ে কাছের পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে।

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 4\ \ 4 \\ \hline 4 & 20\ 00 \\ & 16 \\ \hline 84 & \ \ 4\ 00 \\ & \ \ \underline{3\ 36} \\ & \ \ \ \ \ 64 \end{array}$$

আমরা পাই, 2000 থেকে ন্যূনতম 64 বিয়োগ করে একটা পূর্ণবর্গ সংখ্যা 2000 – 64=1936 পাই, যার বর্গমূল হবে 44। আবার, এর ঠিক পরের বর্গমূল 44+1=45 দিয়ে বর্গসংখ্যা পাই $45^2 = 2025$। সুতরাং এই সংখ্যাটা পাই 2025–2000 =25 যোগ করে। যেহেতু 64 > 25, তাই 2000-য়ের সবচেয়ে কাছের পূর্ণবর্গ সংখ্যাটা হল, যেটা যোগ করে পাই, 2025।

লক্ষ করো: কোনও সংখ্যা যোগ করে কাছের পূর্ণবর্গ সংখ্যাটা বেশি হতে পারে আর কোনও সংখ্যা বিয়োগ করে কম হতে পারে । কত যোগ ও কত বিয়োগ করতে হচ্ছে তুলনা করে ছোটটা নিলেই সবচেয়ে কাছের পূর্ণবর্গ সংখ্যাটা পাব।

অনুশীলন 7.5

1. ভাগ পদ্ধতি ব্যবহার করে বর্গমূল বার করো

a. 289	b. 529	c. 784	d. 625	e. 1024
f. 961	g. 1225	h. 900	i. 841	j. 1089

2. 3000-য়ের সবচেয়ে কাছের (নিকটতম) পূর্ণবর্গ সংখ্যা কত?
3. চার অঙ্কের সবচেয়ে ছোট পূর্ণবর্গ সংখ্যা কত । [সূত্র: 1000 সাথে কত যোগ করবে]
4. চার অঙ্কের সবচেয়ে বড় পূর্ণবর্গ সংখ্যা কত। [সূত্র: 9999 থেকে কত বিয়োগ করবে]
5. চার অঙ্কের সবচেয়ে ছোট আর সবচেয়ে বড় পূর্ণবর্গ সংখ্যা বার করো, যা 8, 15, 20, 25 দিয়ে ভাগ করা যায় (বা বিভাজ্য)। [সূত্র: বর্গ সংখ্যা 2,4,16,25 দিয়ে গুণ ও ভাগ কর দেখো]
6. 202* সংখ্যায় *-য়ের জায়গায় কত বসালে সংখ্যাটা পূর্ণবর্গ হয়? [সূত্র: প্রথমে 9 বসিয়ে দেখো ন্যূনতম কত বিয়োগ করে পূর্ণবর্গ হয়]

উত্তর 7.5 1a. 17 b.23 c.28 d.25 e.32 f.31 g.35 h. 30 i.29 j. 33
2. 3025 3. 1024 4. 9801 5. 3600 6. 5

পাঠ 8. সংখ্যারেখায় নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা ও ঋণাত্মক সংখ্যা

8.1 নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা

আমরা প্রায়ই তুলনা করে বলি, ছোট-বড়, বাঁদিকে-ডানদিকে, ওপরে-নিচে, বাড়া-কমা, পূবদিকে-পশ্চিমদিকে, লাভ-ক্ষতি, জমা-খরচ, আয়-ব্যয়, কম-বেশি, হাল্কা-ভারি, ইত্যাদি। এইসব জোড়া রাশিগুলোতে একটা অন্যটার বিপরীত। এই রাশিগুলো যদি আমরা সংখ্যা দিয়ে পরিমাপ করি, তাহলে সেই সংখ্যাগুলো হবে **নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা**, কারণ এগুলোর একটা সংখ্যা ঠিক করলে তার বিপরীত দিকের সংখ্যাটাও ঠিক করা হয়ে যায়। নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা হল সেইসব সংখ্যা যাদের শুধু মান নয়, দিকও আছে।

মনে করো, সিঁড়ি দিয়ে রাজু উঠল 4 ধাপ ওপরে আর মিতা নামল 4 ধাপ নিচে । দুটো তো এক নয়, কারণ একজন উঠল আর অন্যজন, তার বিপরীতে নামল, যদিও সংখ্যায় আসছে একই সংখ্যক ধাপ, 4। তাই, শুধু সংখ্যায় মাপলে হবে না, দিকও বোঝাতে হবে। এই দিকের বৈপরীত্য বোঝাব কী করে?

বৈপরীত্য বোঝাতে আমরা সংখ্যার আগে দুটো চিহ্ন ব্যবহার করি। একটা হল যোগ চিহ্ন +, আর অন্যটা হল বিয়োগ চিহ্ন – । কারণ, আমরা জানি, যোগ আর বিয়োগ হল পরস্পরের বিপরীত। সংখ্যার আগে + চিহ্ন দিয়ে বোঝাব সংখ্যাটা ধনাত্মক, ইংরেজিতে বলে Positive (পজিটিভ), আর – চিহ্ন বসিয়ে বোঝাব সংখ্যাটা হল ঋণাত্মক, ইংরেজিতে বলে Negative (নেগেটিভ)।

ওপরের উদাহরণে আমরা একটাকে যদি +4 লিখি, তাহলে অন্যটাকে লিখব –4 । কিন্তু প্রশ্ন হল, কোন্‌টাকে ধনাত্মক ধরব—ওপরে ওঠা না নিচে নামা?

আরেকটা উদাহরণ ভাবো ইস্কুলের ক্লাসে ছেলেদের গড় ওজন হল 45 কেজি। তোমার ওজন গড় থেকে 3 কেজি বেশি আর আমার 3 কেজি কম। বৈপরীত্য বোঝাতে একটাকে লিখব +3 কেজি আর অন্যটাকে লিখব –3 কেজি। কিন্তু এখানেও সেই একই সমস্যা, কোন্‌টাকে ধরব + বা কোন্‌টাকে ধরব – বেশি ওজন না কম ওজন?

এর উত্তরে কোনও নিয়ম নেই, আছে প্রচলিত রীতি। সকলের বোঝার সুবিধার জন্য সেই রীতি অনুসরণ করে কোন্‌টা ধনাত্মক (বা বিপরীতে ঋণাত্মক) তা আমাদের ঠিক করে নিতে হয়।

সাধারণভাবে আমরা সকলেই বড় হতে চাই, ওপরে উঠতে চাই, বেশি পেতে চাই, আয় করতে চাই, বৃদ্ধিকে ভাল মনে করি। তাই এই ধরনের রাশিগুলোকে

আমরা ধনাত্মক ধরি। ফলে, এগুলোর বিপরীতে ছোট, নিচে, নামা, কম, ব্যয়, হ্রাস হয়ে যায় ঋণাত্মক। আবার দেখো, তুমি সংখ্যা লেখো তোমার বাঁদিক থেকে ডানদিকে। ডানদিকে যত অঙ্ক বসাবে সংখ্যাটা ততই বড় হতে থাকবে। তাহলে, তোমার ডানদিক হবে ধনাত্মক আর তার বিপরীতে বাঁদিক হবে ঋণাত্মক (মনে রেখো, তোমার ডানদিক কিন্তু তোমার মুখোমুখি অন্যজনের বাঁদিক)।

প্রচলিত রীতি: ধনাত্মক ও বিপরীতে ঋণাত্মক পরিমাপ			
ধনাত্মক		ঋণাত্মক	
ডানদিক	+	বাঁদিক	–
ওপরে	+	নিচে	–
বেশি	+	কম	–
বড়	+	ছোট	–
বৃদ্ধি (বাড়া)	+	হ্রাস (কমা)	–
আয়	+	ব্যয়	–
জমা	+	খরচ	–
লাভ	+	লোকসান (ক্ষতি)	–
ভারি	+	হাল্কা	–
সামনে	+	পেছনে	–

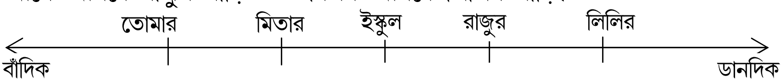
আমরা মূল চারটে দিক জানি, পূব, পশ্চিম, আর উত্তর, ও দক্ষিণ। পূর্ব ও পশ্চিম পরস্পরের বিপরীত, আর উত্তর ও দক্ষিণ পরস্পরের বিপরীত। এগুলো সবই তোমার অবস্থান বা কোনও নির্দিষ্ট স্থানের **আপেক্ষিক**। এই কারণে এগুলোর মধ্যে বৈপরীত্য থাকলেও কোন্‌টা ধনাত্মক (ঋণাত্মক) ধরা হবে তাও আপেক্ষিক হবে। যেমন, তুমি পূর্ব দিকে তাকিয়ে থাকলে (তোমার বাঁদিকে) উত্তর দিক হবে ঋণাত্মক আর (তোমার ডানদিকে) দক্ষিণ দিক হবে ধনাত্মক। আবার উত্তর দিকে তাকিয়ে থাকলে, পূর্ব দিক হবে ধনাত্মক আর পশ্চিম দিক হবে ঋণাত্মক। এগুলো ঠিক উল্টে যাবে যদি তুমি পশ্চিমদিকে তাকিয়ে উত্তর-দক্ষিণ আর দক্ষিণদিকে তাকিয়ে পূর্ব-পশ্চিম দিকগুলোয় পরিমাপ করো। [এই আপেক্ষিকতার কারণে মানচিত্রে একটাই নিয়ম মানা হয়—পূর্ব (ডানদিক) ধনাত্মক, পশ্চিম (বাঁদিক) ঋণাত্মক, উত্তর (উপর দিক) ধনাত্মক, দক্ষিণ (নিচের দিক) ঋণাত্মক।]

8.2 সংখ্যারেখায় নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা

সংখ্যা দিয়ে পরিমাপ করতে হলে সাধারণভাবে যে সংখ্যা আমরা ব্যবহার করি (ধনাত্মক হিসাবে) তার বিপরীতে ঋণাত্মক সংখ্যাও প্রয়োজন হতে পারে বিভিন্ন পরিমাপের ক্ষেত্রে। তাহলে, আমাদের এই সংখ্যা দিয়ে পরিমাপের ব্যবস্থাটা কেমন হবে। এটা বোঝা যাবে সংখ্যারেখা তৈরি করে। মনে রেখো, এই সংখ্যারেখায় কোনও সংখ্যার আগে কোনও চিহ্ন না দিলে ধরে নিতে হবে যে ওটা ধনাত্মক সংখ্যা, (মানে সামনে + চিহ্ন আছে)। কিন্তু ঋণাত্মক সংখ্যার সামনে – চিহ্নটা অতি অবশ্যই দিতে হবে।

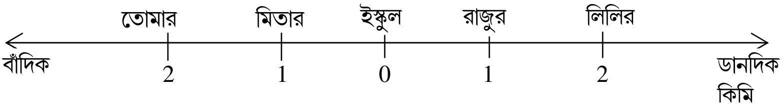
সংখ্যারেখা বুঝতে মনে করো তুমি ইস্কুলের মুখোমুখি দাঁড়িয়ে। তোমার বাঁদিকে সোজা রাস্তায় ইস্কুল থেকে 1 কিমি দূরে মিতার বাড়ি আর 2 কিমি দূরে তোমার বাড়ি। আর তোমার ডানদিকের সোজা রাস্তায় 1 কিমি দূরে রাজুর বাড়ি আর 2 কিমি দূরে লিলির বাড়ি। কাগজে একটা সরলরেখা টেনে তুমি এটাকে এঁকে দেখাও, তোমার বাঁদিক ও ডানদিক ঠিক রেখে।

প্রথমে দুই মুখে তির চিহ্ন দিয়ে একটা সরলরেখা আঁকো ও তার বাঁদিক আর ডানদিক নির্দিষ্ট করে নাও। এবার এই রেখার ঠিক মাঝখানে একটা দাগ দিয়ে সেটাকে ধরো ইস্কুল, যেখান থেকে দূরত্বগুলো মাপা হচ্ছে। এবারে দেখো, ডানদিকের অংশে থাকবে রাজু আর লিলির বাড়ি। ইস্কুল থেকে ডানদিকে গেলে আগে আসবে রাজুর বাড়ি ও তারপর আসবে লিলির বাড়ি।

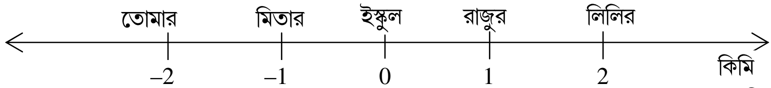


এবারে প্রশ্ন হল, সরলরেখাটার ঠিক কোন্‌খানে দাগ দিয়ে দেখাব, ইস্কুল থেকে 1 কিমি দূরে রাজুর আর 2 কিমি দূরে লিলির বাড়ি। এর জন্য আগে আমাদের আগে নির্দিষ্ট করতে হবে যেখান থেকে মাপা হচ্ছে, মানে এখানে ইস্কুলের দাগটাকে, **0 দিয়ে** । কারণ, ইস্কুল থেকে ইস্কুলের দূরত্ব তো কিচ্ছু নেই বা শূন্য। এবার ইস্কুলের ডানদিকে রাজুর বাড়ি নির্দিষ্ট করে রেখাটার যেখানে দাগ দেব, সেটা হবে ইস্কুল থেকে 1 কিমি, আর ঠিক সেই মাপে আরও 1 কিমি দূরে, মানে ইস্কুল থেকে 2 কিমি দূরে রেখাটায় দাগ দেবো লিলির বাড়ি বলে। এখন ডানদিকে কিমি লিখতে ভুলো না।

বাঁদিকের অংশে থাকবে মিতা আর তোমার বাড়ি। ইস্কুল থেকে গেলে আগে আসবে মিতার ও তারপর আসবে তোমার বাড়ি। একই ভাবে রেখায় থাকবে ইস্কুল থেকে 1 কিমি দূরে মিতার আর 2 কিমি দূরে তোমার বাড়ি ।

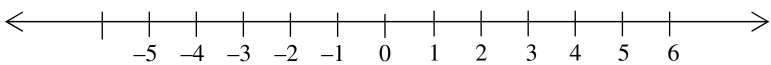


এবারে দেখো, বাঁদিক আর ডানদিকে তো একই সংখ্যা। এরা যে আলাদা বা বিপরীত দিকের সংখ্যা, সেটা তো দেখা যাচ্ছে না। তাই, প্রচলিত নিয়মে আমরা ডানদিকের সংখ্যাগুলোকে ধনাত্মক ধরে বাঁদিকের সংখ্যাগুলোকে ঋণাত্মক ধরব। এর জন্য ডানদিকের ধনাত্মক সংখ্যার আগে কোনও চিহ্ন দেব না, মানে + চিহ্নটা দেওয়ার দরকার নেই। কিন্তু বাঁদিকের সংখ্যাগুলো ঋণাত্মক বোঝাতে আগে – চিহ্ন দিয়ে নেব। তাহলে আর আমাদের রেখাটাতে বাঁদিক ও ডানদিক উল্লেখ করতে হবে না। এটাই হল সংখ্যারেখায় দেখানো।



সুতরাং, সংখ্যারেখায় আমরা ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সংখ্যাগুলো দেখাতে পারি। ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সংখ্যাগুলো পরস্পরের বিপরীত, ও তাদের মাঝে থাকে 0, যা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, কোনওটাই নয়।

সংখ্যারেখা



8.3 পূর্ণ সংখ্যা, পূর্ণ সংখ্যার মান, ও পরম মান

মাঝে 0 নিয়ে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সংখ্যাগুলোকে বলে পূর্ণ সংখ্যা, ইংরেজিতে বলে Integer (ইনটেজার)। ঋণাত্মক সংখ্যার মান হিসাবে ছোট থেকে বড় (মানে কম ঋণাত্মক থেকে আরো বেশি ঋণাত্মক) করে সাজালে ধনাত্মক সংখ্যার সাজানোর ঠিক উল্টো হয়। এটা নিচে দেখে নাও —

ঋণাত্মক সংখ্যা: সংখ্যারেখায় বাঁদিকে গেলে কম থেকে আরো কম

$$-1 > -2 > -3 > -4 > -5 > -6 \ldots\ldots$$

ধনাত্মক সংখ্যা: সংখ্যারেখায় ডানদিকে গেলে বেশি থেকে আরো বেশি

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 \ldots\ldots$$

লক্ষ করো, ধনাত্মক সংখ্যায় +2 হল +1-য়ের থেকে বড়। কিন্তু, ঋণাত্মক সংখ্যায় –2 হল –1-য়ের থেকে ছোট।

পূর্ণ সংখ্যায় আমরা সংখ্যার আগে + বা – চিহ্ন দিয়ে বোঝাই সংখ্যাটা ধনাত্মক না ঋণাত্মক। সুতরাং এই চিহ্নটা বাদ দিলে আমরা পাই শুধুই সংখ্যা হিসাবে একটা মান, যাকে বলা হয় পূর্ণসংখ্যার **পরম মান**, ইংরেজিতে Absolute Value (অ্যাবসলিউট ভ্যালু)। এই পরম মান আমাদের ব্যবহার করতে হবে ঋণাত্মক সংখ্যা বিয়োগ করার সময়।

8.4 ঋণাত্মক সংখ্যার যোগ ও বিয়োগ

আগে সাধারণ বা অখণ্ড সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ, ও ভাগ প্রক্রিয়া শিখেছি। এবারে দেখব, ঋণাত্মক সংখ্যা হলে এই প্রক্রিয়াগুলো কেমন ফল দেবে। প্রথমে আমরা সংখ্যারেখা দিয়ে যোগ ও বিয়োগ প্রক্রিয়া বোঝার চেষ্টা করব। মনে করো তুমি হেঁটে হেঁটে পূবদিকে যেতে চাও। তাহলে আমরা দুটো রাশি (যা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হয়) পাই। একটা হল দিক, আর অন্যটা হল তোমার হাঁটা।

যোগ ও বিয়োগ প্রক্রিয়া

- পূব দিকে যাওয়াটা লক্ষ্য, তাই দিকের হিসেবে পূব দিকে এগোলে সেটা হয় ধনাত্মক (+), আর উল্টো পশ্চিম দিকে এগোলে তা হবে ঋণাত্মক (–)।
- এবার দেখো তোমার হাঁটা দুই রকম হতে পারে। তুমি সামনের দিকে তাকিয়ে সোজা হাঁটলে সেটা হয় হাঁটার হিসাবে ধনাত্মক হাঁটা (+)। কিন্তু, সামনের দিকে তাকিয়েই পেছন দিকে উল্টো হাঁটলে (পায়ের গোড়ালি দিয়ে পেছনে হাঁটা) সেটা হয় তোমার হাঁটার হিসাবে ঋণাত্মক হাঁটা (–) । এবার লক্ষ করো —

1. লক্ষ্য পূবদিকে যাওয়া। তাই পূব দিককে সামনে রেখে সোজা হাঁটলে সেটা হবে দিকের হিসাবে ধনাত্মক (+), আবার তোমার হাঁটার হিসাবেও ধনাত্মক (+)। দুটোই ধনাত্মক ও তুমি 1 ফুট 2 ফুট, 3 ফুট করে পূবদিকেই এগিয়ে যাবে। মনে করো তুমি একটা জায়গাকে 0 ধরে সেখান থেকে এভাবে হাঁটা শুরু করলে পূবদিকে ও 7 ফুট এগোলে। তাহলে দিকের হিসেব ও হাঁটার হিসাবে কী ঘটবে? এই হিসেব করতে এইভাবে লিখব—

অবস্থান, দিকের চিহ্ন, (হাঁটার চিহ্ন সহ কত ফুট হাঁটা)

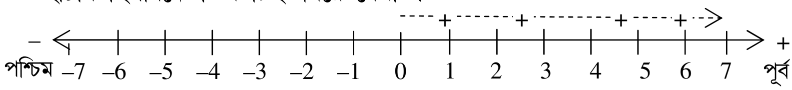
0+(+1)=0+1=1; 1+(+1)=1+1=2;

2+(+1)=2+1=3; এইভাবে 5+2=7 ।

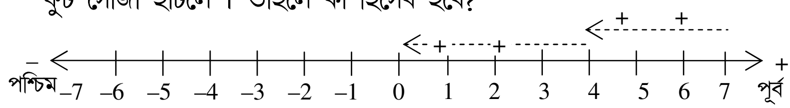
অর্থাৎ, +চিহ্ন দেওয়া সংখ্যা যোগ করলে আমরা +চিহ্ন দেওয়া সংখ্যাই পাই। আর সংখ্যার **আগে পরপর + চিহ্নের ফলে সংখ্যার চিহ্ন + চিহ্নই** থাকে।

যোগফলের পরম মান হল সংখ্যাদুটির পরম মানের যোগফল।

এটা নিজে হেঁটে করে দেখো, ও তারপর সংখ্যারেখায় আঁকো। পূবদিককে ডানদিকে রেখে + চিহ্ন দিয়ে নাও ও মাঝে 0 রেখে উল্টো দিককে পশ্চিম দিক হিসাবে – চিহ্ন দিয়ে নাও। এটা হল দিকের হিসাব। এবার তোমার হাঁটার হিসাবকে তির চিহ্ন দিয়ে দেখাও।



2. কিন্তু এরপর, 7 ফুটে পৌঁছনোর পর, তুমি উল্টো ঘুরে পশ্চিম দিককে সামনে রেখে সোজাই হাঁটলে । এটা হবে দিকের হিসাবে ঋণাত্মক (–), যদিও তোমার হাঁটার হিসাবে ধনাত্মক (+)। মনে করো তুমি এভাবে পশ্চিম দিকে 3 ফুট সোজা হাঁটলে । তাহলে কী হিসেব হবে?

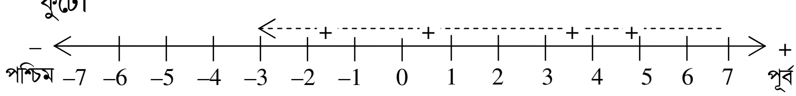


7–(+3) = 7–3 = 4 । এইভাবে আরও 4 ফুট হাঁটলে এসে যাবে সেই 0-তেই। 7–(+3+4) = 7–(+7) = 7–7=0 ।

এটা এভাবেও ভাবতে পারি— 7+(–3) = 7–3 = 4; **7+ (–7)**= 7–7= 0 ।

সংখ্যার আগে + ও – চিহ্নের ফলে সংখ্যার চিহ্ন – চিহ্ন হয়ে যায়। আর **দুটো বিপরীত সংখ্যার যোগফল 0 হয়।**

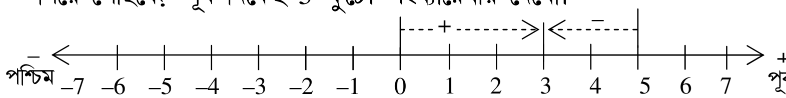
এবার ভাবো, পূবে 7 ফুট যাওয়ার পর উল্টো দিকে ঘুরে সামনের দিকে, মানে পশ্চিম দিকে, 10 ফুট হাঁটলে। তাহলে তুমি গিয়ে পৌঁছবে সংখ্যারেখায় –3 ফুটে।



অর্থাৎ, এবার হল, 7+ (–10) = 7–10 = –3।

লক্ষ করো, প্রথমে পেয়েছিলে 7+(–3)=4 আর এখন পেলে 7+ (–10) =–3 । যোগের নিয়ম হিসাবে পেলাম, বিপরীত চিহ্ন দেওয়া সংখ্যা যোগ করলে সর্বদা **বড় সংখ্যার পরম মান থেকে ছোট সংখ্যার পরম মান বিয়োগ হবে,** আর **বড় সংখ্যার চিহ্নটাই বিয়োগফলে** আসবে।

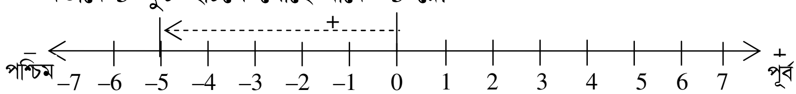
3. এবার একটা বিশেষ উদাহরণ দেখো। তুমি পূব দিকে মুখ (+) করে 0 থেকে সোজা হেঁটে 3 ফুটে পৌঁছে গেছ। এবার উল্টে ঘুরে পশ্চিম দিকে মুখ (–) করে দাঁড়ালে। কিন্তু হাঁটলে 2 ফুট উল্টো পায়ে পিছন দিকে (–)। কোথায় গিয়ে পৌঁছবে? পূব দিকেই 5 ফুটে। সংখ্যারেখায় দেখো।



এই 2 ফুটের হাঁটায় দিকটা পশ্চিমমুখো (–) আবার হাঁটাও উল্টো (–)।
তাই আমরা পেলাম, $3 - (-2) = 3+2 = 5$।

সংখ্যার **আগে দুটো – চিহ্নের ফলে সংখ্যার চিহ্ন + চিহ্ন** হয়ে যায়।

4. এবারে 0-য়ের বাঁদিকে ঋণাত্মক সংখ্যার অংশে কী হবে দেখো। তোমার পূব দিকেই যাওয়া লক্ষ্য, কিন্তু, মনে করো, তুমি ভুল করে 0 থেকে শুরু করলে উল্টো দিকে, মানে পশ্চিম দিকে। ফলে সোজা হাঁটলে তুমি –1, –2, –3 করে আরও ঋণাত্মক দিকে যেতে থাকবে। তুমি হাঁটছ সোজা সামনের দিকেই তাই তোমার হাঁটার চিহ্নটা + । কিন্তু দিকটা উল্টো, তাই দিক-য়ের চিহ্ন হল –। এভাবে 5 ফুট হাঁটলে পৌঁছে যাবে –5-য়ে।



এখানে আমরা পেলাম, $0-(+1)=0-1=-1$; বা, $0+(-1) = 0-1 = -1$

$-1-(+1) = -1-1 = -2$ বা, $-1+(-1) = -1-1 = -2$

এইভাবে, $-2-(+3) = -2-3 = -5$ বা, $-2+(-3) = -2-3 = -5$

অর্থাৎ, **–**চিহ্ন দেওয়া সংখ্যা যোগ করলে আমরা **–**চিহ্ন দেওয়া সংখ্যাই পাই। ঋণাত্মক বলে এই যোগফল আরও ছোট হয়, যত সংখ্যাটা বাড়ে। আর সংখ্যার **আগে – ও + চিহ্নের ফলে সংখ্যার চিহ্ন – চিহ্ন** হয়ে যায়।

5. নিজে ভেবে করো —

পশ্চিমমুখো সোজা হেঁটে –5 ফুটে পৌঁছে এবার

a) পশ্চিমমুখো থেকেই উল্টো হাঁটলে 3 ফুট ও তারপর আরও 4 ফুট;

b) উল্টো ঘুরে পূবমুখো হয়ে সোজা সামনে হাঁটলে 3 ফুট ও তারপর আরও 4 ফুট;

c) উল্টো ঘুরে পূবমুখো হয়ে উল্টো হাঁটলে 2 ফুট।

যোগ ও বিয়োগ প্রক্রিয়ার সাধারণ নিয়ম কী পেলাম

সমচিহ্নের সংখ্যার যোগ	সংখ্যাগুলো মধ্যে যোগ হয়	ধনাত্মক চিহ্ন হলে যোগফল ধনাত্মক হয় ও তার মান বেড়ে যায়। $+8 + 7 = +15$
		ঋণাত্মক চিহ্ন হলে যোগফল ঋণাত্মক হয় ও তার মান কমে যায়। $-6 - 9 = -15$
বিপরীত চিহ্নের সংখ্যার যোগ	সংখ্যাগুলোর মধ্যে বিয়োগ হয়	পরম মানে বড় সংখ্যাটা থেকে ছোট সংখ্যাটা বিয়োগ হয় ও বিয়োগফলে বড় সংখ্যাটার চিহ্ন আসে। $+8 - 6 = +2$; $+6 - 9 = -3$
মনে রেখো কোনও পূর্ণ সংখ্যার সামনে কোনও চিহ্ন না দেওয়া থাকলে সেটাকে ধনাত্মক, অর্থাৎ + চিহ্ন ধরে নিতে হয়।		

এবার মনে করো, সংখ্যারেখা থেকে আমরা আর কী দেখেছি —

- সামনে এগোনো + ;
- পিছিয়ে যাওয়া – । আবার,
- সোজা সামনে পা ফেলে হাঁটলে + ;
- পেছনে পা ফেলে উল্টো হাঁটলে –।

তাহলে আমরা কী কী পাই —

সামনে তাকিয়ে (+) সামনে পা (+) ফেলে 1 পা হাঁটলে	তুমি $+(+1) = +1$ পা সামনে এগোবে।
সামনে তাকিয়ে (+) পেছনে পা (–) ফেলে উল্টো 1 পা হাঁটলে	তুমি $+(-1) = -1$ পা পিছিয়ে যাবে।
পেছনে তাকিয়ে (–) সামনে পা (+) ফেলে 1 পা হাঁটলে	তুমি $-(+1) = -1$ পা পিছিয়ে যাবে।
পেছনে তাকিয়ে (–) পেছনে পা (–) ফেলে উল্টো 1 পা হাঁটলে	তুমি $-(-1) = +1$ পা সামনে এগোবে।

ওপরের এই নিয়ম থেকেই আমরা ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার গুণ ও ভাগের নিয়ম পাব।

8.5 ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার গুণ ও ভাগ

যোগ ও বিয়োগ প্রক্রিয়া থেকে আমরা ওপরে পেয়েছি —

সমচিহ্নে $+(+1) = +1$; $-(-1) = +1$

বিপরীত চিহ্নে $-(+1) = -1$; $+(-1) = -1$

আমরা জানি, যেকোনও সংখ্যাকে অখণ্ড সংখ্যা 1 (বা পূর্ণসংখ্যা 1 পরম মান) দিয়ে গুণ করলে তার কোনও পরিবর্তন হয় না, গুণফলে ওই সংখ্যাটাই পাই। সুতরাং, ওপরের নিয়মকে গুণ হিসাবে দেখিয়ে আমরা লিখতে পারি —

সমচিহ্নে $+1 \times (+1) = +1$; $-1 \times (-1) = +1$

বিপরীত চিহ্নে $-1 \times (+1) = -1$; $+1 \times (-1) = -1$

গুণের নিয়ম:
সমচিহ্নের দুটো সংখ্যা গুণ করলে গুণফল ধনাত্মক হয় (মনে রেখো, ঋণাত্মক সংখ্যাগুলো জোড়ায় থাকতে হবে সমচিহ্নের গুণ পেতে।)
বিপরীত চিহ্নের দুটো সংখ্যা গুণ করলে গুণফল ঋণাত্মক হয় ।

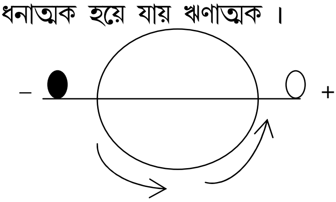
আমরা জানি, ভাগ হল গুণের বিপরীত। তাই ভাগের ক্ষেত্রেও আমরা একই নিয়ম পাব, অখণ্ড সংখ্যা দিয়ে ওপরের নিয়মটাকে ভাগ হিসাবে দেখিয়ে।

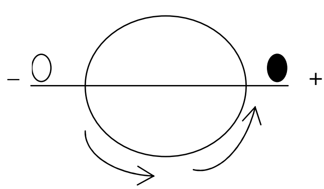
সমচিহ্নে $(+1) \div (+1) = +1$; $(-1) \div (-1) = +1$

বিপরীত চিহ্নে $(-1) \div (+1) = -1$; $(+1) \div (-1) = -1$

ভাগের নিয়ম:
সমচিহ্নের দুটো সংখ্যার একটাকে আরেকটা দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল ধনাত্মক হয় (ঋণাত্মক সংখ্যাগুলো জোড়ায় থাকতে হবে সমচিহ্নের ভাগ পেতে।)
বিপরীত চিহ্নের দুটো সংখ্যার একটাকে আরেকটা দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল ঋণাত্মক হয় ।

ঋণাত্মক সংখ্যাকে ঋণাত্মক সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে আমরা যে ধনাত্মক সংখ্যা পাই, তার আরও ব্যাখ্যা পাবে উচ্চতর অঙ্কশাস্ত্রে। নিচের বৃত্তে দেখো, ঠিক বিপরীতে ঘুরলে, মানে -1 দিয়ে গুণ করলে, ঋণাত্মক হয়ে যায় ধনাত্মক, আর ধনাত্মক হয়ে যায় ঋণাত্মক ।





পাঠ 9. মূলদ সংখ্যা ও অমূলদ সংখ্যা

9.1 বিভিন্ন ধরনের সংখ্যা—মূলদ সংখ্যা ও অমূলদ সংখ্যা

স্বাভাবিক সংখ্যা, ইংরেজিতে বলে Natural Numbers (ন্যাচারাল নাম্বারস্), হল 1, 2, 3, 4, করে সংখ্যা গুলো। এগুলোর আরম্ভ (শূন্য) বলে কিছু নির্দিষ্ট নেই। এখানে 0 (শূন্য) বসে কেবলমাত্র দশক, শতক, হাজার, ইত্যাদি সংখ্যাগুলোতে কোনও সংখ্যার শেষে। অখণ্ড সংখ্যা, ইংরেজিতে বলে Whole Numbers (হোল নাম্বারস্), হল 0, 1, 2, 3, 4, করে স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো যার আরম্ভে 0 নির্দিষ্ট করা হয়। পূর্ণসংখ্যা, ইংরেজিতে বলে Integer (ইনটেজার), হল অখণ্ড সংখ্যাগুলো, যেগুলো ধনাত্মক ও বিপরীতে ঋণাতক হয়, মাঝে 0-কে একটা বিন্দু হিসাবে ধরে। এই সংখ্যাগুলো আমরা শিখেছি।

এবার আমরা দেখব এক বিশেষ ধরনের সংখ্যা। যাবতীয় স্বাভাবিক সংখ্যা, অখণ্ড সংখ্যা বা পূর্ণ সংখ্যাকে বলা হয় মূলদ সংখ্যা, ইংরেজিতে বলে Rational Numbers (র‍্যাশনাল নাম্বার) । কারণ, এগুলোকে আমরা ভগ্নাংশ আকারে লিখতে পারি, লব হিসাবে নিয়ে 1-কে হর ধরে।

মনে রাখো: ভগ্নাংশ আকারে লেখা যায় (হর 0 নয়) এমন যেকোনও সংখ্যা হল মূলদ সংখ্যা। সুতরাং, ভগ্নাংশ আকারে লেখা সব সংখ্যাই হল মূলদ সংখ্যা।

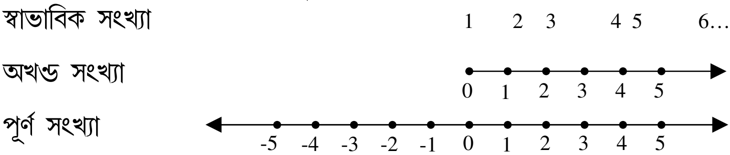
অমূলদ সংখ্যা, ইংরেজিতে বলে Irrational Numbers (ইর্‌র‍্যাশনাল নাম্বার) হল সেইসব সংখ্যা, যাদের ভগ্নাংশ আকারে লেখা যাবে না। এগুলো হল অসীম দশমিক সংখ্যা, যার দশমিক অংশটা আবৃত্ত বা পৌনঃপুনিক নয়।

আগে শিখেছি যে আবৃত্ত দশমিক অসীম হলেও তাকে আমরা ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করতে পারি। তা নাহলে, অসীম দশমিক সংখ্যাকে ভগ্নাংশ আকারে লেখা যায় না। এর একটা উদাহরণ হল, $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$। আরেকটা দেখো, 1.61803398874989484820... । এই ধরনের আরও অনেক অমূলদ সংখ্যা হতে পারে ও আমরা তৈরিও করতে পারি। এই অসীম দশমিক সংখ্যাগুলোকে ভগ্নাংশ আকারে নির্দিষ্ট মান দিয়ে লেখা যায় না।

মূলদ সংখ্যা ও অমূলদ সংখ্যা আমরা শিখলাম, সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণাটা পরিষ্কার করে নিতে। প্রথমে দেখো, স্বাভাবিক সংখ্যায় যেহেতু আরম্ভ (বা শূন্য) নেই তাই, এগুলোকে আমরা সংখ্যারেখায় নির্দিষ্ট করতে পারিনা। কারণ, সংখ্যার

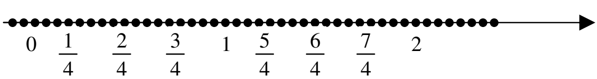
হিসাবে 1+1=2, 2+1=3, 3+1=4.....। কিন্তু 1 ঠিক কতটা তা আমরা নির্দিষ্ট করতে পারছি না স্বাভাবিক সংখ্যা দিয়ে।

এরপর, অখন্ড সংখ্যায় আমরা আরম্ভে 0 (শূন্য) হিসাবে একটা বিন্দু ধরে নির্দিষ্ট করে নিই 1 সংখ্যাটা ঠিক কতটা। তারপর সেই দূরত্বের হিসাবে সংখ্যারেখায় পরপর সংখ্যা নির্দিষ্ট করে বসিয়ে যেতে পারি। কিন্তু এগুলো সবই ধনাত্মক সংখ্যা। তাই ধনাত্মকের সাথে সাথে একই পরিমাপে ঋণাত্মক সংখ্যাও আনতে আমরা ব্যবহার করি পূর্ণ সংখ্যা। নিচের ছবিতে দেখো—



মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার ধারণাটা কেন দরকার হয়? লক্ষ করো, সংখ্যারেখায় 0-কে একটা বিন্দু হিসাবে নির্দিষ্ট করে আমরা পরপর সংখ্যাগুলোকে বসিয়েছি সমান দূরত্বে এক একটা বিন্দুতে, 0 থেকে ডানদিকে 1, 2,3, ... বা বাঁদিকে –1,–2,–3, ... ইত্যাদি করে। এবার প্রশ্ন হল— 0 থেকে 1, বা 2 থেকে 3, বা যেকোনও দুটো পূর্ণ সংখ্যার মাঝে আরও সংখ্যা কি থাকতে পারে? উত্তর হল, হ্যাঁ, অসংখ্য মূলদ সংখ্যা, এমনকি অমূলদ সংখ্যাও থাকতে পারে।

প্রথমে জ্যামিতির ধারণা থেকে ভাব। যেমন, সংখ্যারেখায় 0 আর 1 আমরা দুটো বিন্দুকে নির্দিষ্ট করেছি। এই দুটো বিন্দুর মাঝের রেখায় তো অসংখ্য বিন্দু থাকতে পারে, আর তাহলে সেগুলোকেও সংখ্যা দিয়ে দেখানো যেতে পারে।



9.2 মূলদ সংখ্যা ও অমূলদ সংখ্যা **বার করা**

পরপর দুটো পূর্ণ সংখ্যার মাঝে মূলদ সংখ্যা বার করা

ওপরের ছবিতে লক্ষ করো, যেকোনও দুটো পূর্ণ সংখ্যার মাঝে এগুলো হল ভগ্নাংশ আকারে মূলদ সংখ্যা। এমন অসংখ্য মূলদ সংখ্যা আমরা পেতে পারি, ভগ্নাংশের হরটাকে বড় থেকে আরও বড় করে নিয়ে।

উদাহরণ 1. দুটো মূলদ সংখ্যা 25 আর 26-য়ের মাঝে 5টা মূলদ সংখ্যা।

যেহেতু আমাদের 5 টা মূলদ সংখ্যা পেতে হবে, তাই আমরা হর নিলাম 6। তাহলে 25 হল $\frac{25x6}{6} = \frac{150}{6}$ আর 26 হল $\frac{26x6}{6} = \frac{156}{6}$ ।

এবার আমরা পর পর পাঁচটা মূলদ সংখ্যা লিখতে পারি ভগ্নাংশ আকারে —

$25=\frac{150}{6}$, $\frac{151}{6}$, $\frac{152}{6}$, $\frac{153}{6}$, $\frac{154}{6}$, $\frac{155}{6}$, $\frac{156}{6}=26$।

মনে রাখো: যেকোনও পরপর দুটো পূর্ণ সংখ্যার মাঝে ভগ্নাংশ আকারে 1টা মূলদ সংখ্যা পাব 2-কে হর ধরে, 2টা মূলদ সংখ্যা পাব 3-কে হর ধরে, 3টা মূলদ সংখ্যা পাব 4-কে হর ধরে। এইভাবে 10-কে হর নিলে পাব 9টা মূলদ সংখ্যা। অর্থাৎ, যতগুলো সংখ্যা পেতে চাও, তার থেকে 1 বেশি করে নিয়ে হর ধরতে হবে। এইভাবে আমরা অসংখ্য মূলদ সংখ্যা তৈরি করতে পারি, একশ, হাজার, লক্ষ, কোটি ইত্যাদিকে হর ধরে নিয়ে।

পূর্ণ সংখ্যা ঋণাত্মকও হয়। ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যাগুলোর ক্ষেত্রেও আমরা একই নিয়মে বিপরীত দিকে ঋণাত্মক ভগ্নাংশের আকারে মূলদ সংখ্যা বার করতে পারব । মনে রাখতে হবে যে ঋণাত্মক সংখ্যা উল্টো দিকে চলে ।

দুটো ভগ্নাংশের মাঝে মূলদ সংখ্যা বার করা

দুটো ভগ্নাংশের মাঝে আরও মূলদ সংখ্যা পেতে হলে প্রথমেই দেখতে হবে ভগ্নাংশ দুটোর হর একই কিনা। একই নাহলে তাদের লসাগুকে হর ধরে সমহর করে নিতে হবে, সেইমতো লব দুটোকেও গুণ করে। এবার সহজেই লব দুটোর মাঝের সংখ্যাগুলো নিয়ে মূলদ ভগ্নাংশগুলো বার করা যাবে। আরও বেশি সংখ্যক মূলদ সংখ্যা পেতে হলে প্রয়োজন মতো এই হরকে (ওপরে বলা নিয়মে) আরও বড় করে নিলেই তা বার করা যাবে।

উদাহরণ 2. $\frac{3}{8}$ ও $\frac{3}{4}$ এই দুটো ভগ্নাংশের মাঝে 2টি মূলদ সংখ্যা বার করো।

সমহর করে নিয়ে পেলাম — $\frac{3}{8}$ ও $\frac{6}{8}$।

এখানে লব পেলাম 3 আর 6, যার মাঝে দুটো স্বাভাবিক সংখ্যা হল 4 আর 5। তাই এই দুটোকে লব ধরে ও 8-কে হর নিয়ে আমরা মাঝে দুটো মূলদ সংখ্যা পাব। উত্তর হল, $\frac{4}{8}$ ও $\frac{5}{8}$ ।

উদাহরণ 3. $\frac{3}{5}$ ও $\frac{2}{3}$ এই দুটো ভগ্নাংশের মাঝে 4টি মূলদ সংখ্যা বার করো।

ভগ্নাংশ দুটোর হর-য়ের লসাগু হল 3x5=15। হর হিসাবে 15 নিলে লব দুটো হবে 3x3= 9 আর 2x5=10। সুতরাং সমহর ভগ্নাংশে আমরা ভগ্নাংশ দুটোকে লিখব, $\frac{9}{15}$ আর $\frac{10}{15}$ । লব-য়ে আছে 9 আর 10, যার মাঝে আর কোনও স্বাভাবিক সংখ্যা নেই। আমাদের পেতে হবে 4টে মূলদ সংখ্যা। তাই এখানে

আমরা ভগ্নাংশদুটোর লব ও হর-কে 5 দিয়ে গুণ করে সমতুল ভগ্নাংশে নিয়ে লিখব। <u>সমতুল ভগ্নাংশে</u> আমরা পেলাম —

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{15} = \frac{45}{75} \quad \text{আর} \quad \frac{2}{3} = \frac{10}{15} = \frac{50}{75}$$

এবারে দেখো 45 আর 50 এর মাঝে আমরা 4টে স্বাভাবিক সংখ্যা লিখতে পারি, 46, 47, 48, আর 49। এগুলোকে লব হিসাবে নিয়ে, ও 75-কে হর হিসাবে রেখে আমরা 4টে মূলদ সংখ্যা পাই, যা $\frac{3}{5}$ আর $\frac{2}{3}$, এই দুটো ভগ্নাংশের মাঝে থাকে। সুতরাং, উত্তর হল,

$$\frac{46}{75}, \ \frac{47}{75}, \ \frac{48}{75}, \text{আর } \frac{49}{75} \ ।$$

ঋণাত্মক ও ধনাত্মক মূলদ সংখ্যার মাঝে আরও মূলদ সংখ্যা বার করা

উদাহরণ 4. মনে করো –1 ও +1-য়ের মাঝে 6টা মূলদ সংখ্যা বার করতে চাও। মনে রাখতে হবে যে ঋণাত্মক ও ধনাত্মক সংখ্যার মাঝে 0 একটা বিন্দু হিসাবে থাকে। সেইজন্য এখানে আমরা 0 থেকে –1 ঋণাত্মক অংশে 3টে আর 0 থেকে +1 ধনাত্মক অংশে 3টে মূলদ সংখ্যা খুঁজব। 3টে করে মূলদ সংখ্যা বার করতে আমরা 4-কে হর হিসাবে নেব। তাহলে এই মূলদ সংখ্যাগুলো হবে— $\frac{-3}{4} \quad \frac{-2}{4} \quad \frac{-1}{4} \qquad \frac{+1}{4} \quad \frac{+2}{4} \quad \frac{+3}{4}$

মনে রাখো: এই ক্ষেত্রে ঋণাত্মক অংশের আর ধনাত্মক অংশের মূলদ সংখ্যাগুলো দুই ভাগে বার করতে হবে।

অমূলদ সংখ্যা বার করা

আমরা জানি, এগুলো হল অসীম দশমিক সংখ্যা, যার দশমিক অংশ আবৃত্ত বা পৌনঃপুনিক নয়। সুতরাং যেকোনও দুটো পূর্ণ সংখ্যা বা ভগ্নাংশের দশমিক মান বার করে নিয়ে আমরা তাদের মাঝে অসংখ্য অমূলদ সংখ্যাও তৈরি করে নিতে পারি। খেয়াল রাখতে হবে অমূলদ সংখ্যার দশমিক অংশ যেন অসীম হয়, আবৃত্ত বা পৌনঃপুনিক না হয়।

উদাহরণ 5. অমূলদ সংখ্যা বার করো, $\frac{5}{7}$ ও $\frac{9}{11}$ -য়ের মধ্যে।

$\frac{5}{7} = 0.\overline{714285}$ ও $\frac{9}{11} = 0.\overline{81}$ মানে, দুটোই আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা।

প্রথমটা থেকে বড় কিন্তু দ্বিতীয়টা থেকে ছোট একটা অমূলদ সংখ্যা আমরা সহজেই তৈরি করতে পারি, যা অসীম দশমিক কিন্তু আবৃত্ত হবে না।

এটা তৈরি করতে প্রথম সংখ্যার 0.71-য়ের দ্বিতীয় দশমিক স্থানে 2 বসিয়ে একটা বড় সংখ্যা করে নেওয়া হল, কিন্তু তা দ্বিতীয় সংখ্যা 0.81-য়ের থেকে

ছোটই থাকল। এবার এই সংখ্যাটাকে অসীম করে নিতে হবে যা ইচ্ছে অখণ্ড সংখ্যা পরপর বসিয়ে, যেমন, 0.7200100012003405600… .। খেয়াল রাখতে হবে, এগুলো যেন কোনও নির্দিষ্ট নিয়মে পৌনঃপুনিক হয়ে না পড়ে। এইভাবে আমরা যেকোনও দুটো মূলদ সংখ্যার মাঝে অসংখ্য অমূলদ সংখ্যা পেতে পারি।

9.3 সংখ্যার জগৎ ও শূন্য সম্বন্ধে ধারণা

আমরা আমাদের চারপাশের জগতকে নির্দিষ্ট করে পরিমাপের জন্য সংখ্যা সৃষ্টি করেছি। আমরা এক একটা সংখ্যা নির্দিষ্ট করি যুক্তি দিয়ে বুঝে । কিন্তু দেখা যাচ্ছে, যেকোনও একটা সংখ্যার একপাশে ছোট ও অন্যপাশে বড় এমন অসংখ্য সংখ্যা হতে পারে। আর আছে অসীমে বিস্তৃত, যুক্তি দিয়ে বোঝা যায় না, অসংখ্য এমন সংখ্যাও । তাহলে আমরা এই সংখ্যার জগতে কি একদম নির্দিষ্ট করে বলতে পারি, ঠিক এইখানে এসে এটা হল 1 আর ওটা হল 2, ইত্যাদি? মনে রেখো, জগৎ হল অসীম, আর তাকে নির্দিষ্ট করে পরিমাপের জন্য আমরা যে সংখ্যার জগৎ তৈরি করছি, সেটাও অসীম, যা আমাদের যুক্তি দিয়ে বোঝার বাইরে। সংখ্যারা তাই আমাদের যুক্তিগ্রাহ্য নির্দিষ্ট করে পরিমাপ করার উপায় মাত্র। বড় হয়ে উচ্চতর বিজ্ঞানে পড়ার সময় এই বিষয়টা বিস্তারিত জানবে।

এই সংখ্যার জগতে শূন্য (0) একটা বিশেষ ধারণামাত্র। এটা কোনও নির্দিষ্ট কিছু বোঝায় না। এর অর্থ আমরা করি 'নেই', ও যেখান থেকে শুরু করা যায় বেশি আছে (ধনাত্মক) বা কম আছে (ঋণাত্মক) বোঝানোর সংখ্যা । কিন্তু সীমাহীন বা অসীম সংখ্যার জগতে 'কিচ্ছু নেই' এমনটা হয়না। যত ছোটই ভাবি, তার থেকেও ছোট কিছু থেকেই যায়। শূন্য তাহলে ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর অসীম, যাকে আমরা ধরি 'নেই'।

তাহলে কোনো সংখ্যার সাথে 0 যোগ বা বিয়োগ করলে আমরা ওই সংখ্যাটাই পাই, কারণ তার সাথে নির্দিষ্ট কিছুই যোগ বা বিয়োগ করা হল না।

$$56 + 0 = 56, \quad 67 - 0 = 67$$

গুণ হল যোগেরই প্রক্রিয়া। তাই 0 দিয়ে কোনও সংখ্যাকে গুণ, বা উল্টে বলা 0-কে কোনও সংখ্যা দিয়ে গুণ করার মানে হল, ওই সংখ্যক বার 0 যোগ করা। তাই এখানে আমরা 0-ই পাই।

$$85 \times 0 = 0, \quad 0 \times 41 = 0$$

কিন্তু কোনও সংখ্যাকে 0 দিয়ে ভাগ করে আমরা কী পাব? শূন্য 0 দিয়ে ভাগ করার কোনো অর্থ হয় না, কারণ 0 কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা নয় যার নির্দিষ্ট মান

আছে। ভাগ মানে হল বার বার একটি সংখ্যা বিয়োগ করে যাওয়া। এখানে বার বার কত বিয়োগ করা হচ্ছে তাই নির্দিষ্ট নয়। তাই 0 দিয়ে ভাগ হয় না।

9.4 সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ প্রক্রিয়ার নিয়ম

বিনিময় নিয়ম

যোগ ও গুণ প্রক্রিয়ায় সংখ্যামালার পদগুলোর সংখ্যার স্থান বিনিময় করা যায়; প্রক্রিয়ার ফলের কোনও পরিবর্তন হয় না। তাই বলা হয় যোগ ও গুণ বিনিময় নিয়ম মেনে চলে।

কিন্তু বিয়োগ ও ভাগের ক্ষেত্রে সংখ্যার পদগুলোর স্থান বিনিময় করা যায় না। কারণ, সেটা করলে প্রক্রিয়ার ফল বদলে যায়। তাই বলা হয় বিয়োগ ও ভাগ বিনিময় নিয়ম মেনে চলে না। উদাহরণ দেখো —

$5+2 = 7$; আবার $2+5 = 7$; $5 \times 2 = 10$; আবার $2 \times 5 = 10$;

$5-2 = 3$; কিন্তু $2-5 = -3$; $10 \div 2 = 5$; কিন্তু $2 \div 10 = 0.2$ ।

সংযোগ নিয়ম

সংযোগ নিয়মে আমরা দুটো প্রক্রিয়াকে সংযুক্ত করে নিই। দেখা যায়, যোগ ও গুণ সংযোগ নিয়ম মেনে চলে। কিন্তু, বিয়োগ ও ভাগ সংযোগ নিয়ম মেনে চলে না। উদাহরণ দেখো —

$5+(2+1) =8$; আবার $5+2+1 = 8$; $5 \times (2 \times 3)=30$; আবার $2 \times 5 \times 3=30$;

$7-(4-2) =5$; কিন্তু $7-4-2= 1$; $6 \div (6 \div 3) = 3$; কিন্তু $6 \div 6 \div 3=1/3$ ।

বিচ্ছেদ নিয়ম

আমরা জানি, যে কোনও যৌগিক সংখ্যাকে উৎপাদকে ভেঙে দুটো সংখ্যার গুণফল হিসাবে দেখা যায়। একটা ভগ্নাংশকেও আমরা দুটো ভগ্নাংশের গুণফল করে দেখাতে পারি। সংখ্যামালাতে যে কোনও প্রক্রিয়া দিয়ে যুক্ত যে পদগুলোতে এমন সংখ্যা আছে, যাদের একটি সাধারণ উৎপাদক হয়, সেই পদগুলো থেকে আমরা বিচ্ছেদ নিয়মে ওই সাধারণ উৎপাদকটাকে আলাদা করে নিতে পারব, গুণ প্রক্রিয়ায় যুক্ত করে। ইংরেজিতে একে বলে Common (কমন) নেওয়া। উদাহরণ—

$54+27 =81$; বা $9 \times 6 +9 \times 3=54$; বিচ্ছেদ নিয়মে $9 \times (6 +3)=81$

পাঠ 10. উপাত্ত বা তথ্যের শ্রেণি বিন্যাস সারণি ও লেখচিত্র

10.1 উপাত্ত বা সংগৃহিত তথ্য

আমরা নানা বিষয়ে তথ্য সংগ্রহ করে বিষয়গুলো সম্বন্ধে ধারণা তৈরি করার চেষ্টা করি। যেমন ধরো, একটা পরীক্ষায় 80 জন ছেলেমেয়ে বাংলা, ইংরেজি ও অঙ্কে বিভিন্ন নম্বর পেয়েছে। কী করে বলবে, কোন্ বিষয়ে ছেলেমেয়েরা বেশি ভাল ফল করেছে। আবার ধরো, একজন দোকানদার তার দোকানে রেখেছে, মুদির জিনিসপত্র, খেলনা, আর জামাকাপড়। 12 মাসের বিক্রির টাকা হিসেব করে সে দেখতে চাইল, কোনগুলোর বিক্রি কোন্ মাসে বেশি হয়।

মনে রাখো, যে তথ্যগুলো তোমার সংগ্রহে আছে বা তুমি পেলে তাকে বাংলায় বলে উপাত্ত, আর ইংরেজিতে সংগৃহিত তথ্য একটা হলে ডেটাম (Datum) ও একাধিক তথ্য হলে ডেটা (Data) বলে।

লক্ষ করো, তথ্য মাত্র দু-চারটে হলে এই ধরনের প্রশ্নগুলোর উত্তর এমনিতেই দেখে বলে দেওয়া যায়। কিন্তু অনেক তথ্য হলে এটা বলতে আমাদের কোনও পদ্ধতি চাই।

10.2 তথ্য-বিন্যাস ও সারণি তৈরি করা

প্রাথমিক পদ্ধতি হল এলোমেলো তথ্যকে সাজিয়ে নেওয়া—এক জাতীয় তথ্যকে এক একটা ভাগে রেখে, বা সংখ্যার তথ্য হলে বড় থেকে ছোট বা ছোট থেকে বড় করে এক একটা শ্রেণিতে রেখে। একে বলে তথ্য বিন্যাস — অবিন্যস্ত তথ্যকে বিন্যস্ত করে নেওয়া। এটা করে আমরা পাই,

1. উপযুক্ত সারণিতে বা টেবিলে বিন্যস্ত তথ্যকে সাজিয়ে লেখা । এর পর আসে,
2. সম্ভব হলে প্রয়োজন মতো লেখচিত্র দিয়ে তথ্যের মূল ছবিটা দেখানো ।

উদাহরণ দিয়ে ব্যাপারটা বোঝা যাক।

উদাহরণ 1. ক্লাসের 20 জন ছাত্রছাত্রী বনভোজনে যেতে চায়, শিক্ষক জানতে চাইলেন কে কোন্ ফল পছন্দ করে। রাজুকে বললেন, কাগজ পেনসিল নাও আর এক একজন করে জিগ্যেস করে ফলের নামটা লেখো। রাজু লিখল,

কলা, কমলা, আপেল, পেয়ারা, পেয়ারা, কমলা, কলা, আপেল, কমলা, কমলা, আপেল, কলা, আপেল, কমলা, কলা, আপেল, আপেল, পেয়ারা, আপেল, কলা।

এবার শিক্ষক বললেন, তাহলে একটা তালিকা করো, বনভোজনে কোন্ ফল কটা নিয়ে যেতে হবে। রাজু তিন বার গুনে তিন রকম পেল, মানে বার বার গোনায় ভুল হল। শিক্ষক বললেন, এটাই জানা না গেলে তো আর বনভোজনে যাওয়া হবে না। তোমারা সকলে মিলে ভেবে কোনও একটা পদ্ধতি করে তালিকাটা করো, যাতে ভুল না হয়।

ছেলেমেয়েরা ভাবনা-চিন্তা করে একটা পদ্ধতি বার করে গুনল, আর তার ফলে আর ভুল হল না । পদ্ধতিটা এই রকম—

1. রাজুর তালিকাটায় চোখ বুলিয়ে দেখে নেওয়া, কী কী ফলের নাম আছে । দেখা যাচ্ছে ছেলেমেয়েদের পছন্দ হল চারটি ফল কলা, পেয়ারা, কমলা, আপেল। একটা কাগজে চারটে লাইন টেনে বাঁদিকে এই চারটে ফলের নাম, একটার নিচে একটা করে, লেখা হল ও তারপর ওগুলোর পাশে একটা ওপর-নিচে একটা লম্বা লাইন টেনে রাখা হল;
2. এবার রাজুর করা তালিকাটা নিয়ে শুরু হল প্রথম ফলের নামটা থেকে, এক একটা করে ফলের নাম কেটে দেওয়া আর তখনই সেই ফলটার নামের পাশে একটা দাঁড়ি চিহ্ন দেওয়া। এই ভাবে সারণি তৈরি করতে যে দাঁড়ি চিহ্নটা দেওয়া হয় তাকে বলে **ট্যালি চিহ্ন** (ইংরেজিতে ট্যালি মার্ক)। এইভাবে রাজুর তালিকার সবকটাকে তোলা হল পরপর প্রতিটার জন্য তার নামের পাশে একটা করে ট্যালি চিহ্ন দিয়ে;

রাজুর তালিকা:

~~কলা~~, ~~কমলা~~, ~~আপেল~~, ~~পেয়ারা~~, ~~পেয়ারা~~, ~~কমলা~~, ~~কলা~~, ~~আপেল~~, ~~কলা~~, ~~কমলা~~, ~~আপেল~~, ~~কলা~~, ~~আপেল~~, ~~কমলা~~, ~~কলা~~, ~~আপেল~~, ~~আপেল~~, ~~পেয়ারা~~, ~~আপেল~~, ~~কলা~~।

সারণি তৈরি করা:

<table>
<tr><td>কলা</td><td>|||| |</td><td>6</td></tr>
<tr><td>পেয়ারা</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>কমলা</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td>আপেল</td><td>|||| ||</td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>20</td></tr>
</table>

3. এরপর কাজ হল ট্যালি চিহ্নগুলো গোনা। যাতে গোনায় ভুল না হয় সেইজন্য প্রতি পাঁচটা ট্যালি চিহ্নকে কেটে রাখা হল, পাঁচ করে গোনার

সুবিধার জন্য। ট্যালি চিহ্নগুলোর ঘরটার পাশে ওপর-নিচে আরেকটা লাইন টেনে তার পাশে গোনা সংখ্যাগুলো লেখা হল। নিচে লাইন টেনে আর একটা সারি করা হল যোগ করে মিলিয়ে দেখার জন্য যোগফলের সংখ্যাটা মোট ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা হল কিনা। না মিললে বুঝতে হবে সারণি তৈরিটা ভুল হয়েছে।

সারণি তৈরি করাটা ঠিক হলেই হয় না। সারণিকে সুন্দর করে প্রকাশ করতে হয়। তার জন্য অতি অবশ্যই দিতে হবে সারণিটার ওপরে একটা উপযুক্ত নাম, যাকে বলে **সারণির শিরোনাম**, যাতে বোঝা যায়, কার সারণি, কীসের সারণি। সারণির প্রতিটা স্তম্ভ বা কলামের ওপরেও সেগুলোর নাম দিতে হবে, যাতে বোঝা যায় ওই কলামে যা রাখা অছে সেগুলো কী। তাই সারণিটাকে আমরা এইভাবে লিখে প্রকাশ করব—

সারণি 1. বিদ্যাচর্চা কেন্দ্রের তৃতীয় শ্রেণির শিক্ষার্থীদের পছন্দের ফল

ফলের নাম	ট্যালি চিহ্ন	মোট পছন্দ সংখ্যা
কলা	$\cancel{||||}$ |	6
পেয়ারা	|||	3
কমলা	||||	4
আপেল	$\cancel{||||}$ ||	7
মোট শিক্ষার্থী		20

সারণির বিভিন্ন অংশের নাম

ওপরের সারণিটা লক্ষ করো। একদম ওপরের আছে সারণিটার শিরোনাম। এর পর দেখো, এই সারণিটাতে আছে বাঁ দিক থেকে ডান দিকে মোট তিনটে স্তম্ভ বা কলাম (Column) আর ওপর থেকে নিচে মোট ছয়টা সারি বা রো (Row)।

সারণির ওপরের প্রথম সারি বা রো হল স্তম্ভ বা কলামগুলোর শিরোনাম দেওয়ার জন্য। ওপরের সারণিতে দেখো, তিনটে স্তম্ভের শিরোনাম দেওয়া আছে। বাঁদিকের প্রথমটা হল ফলের নাম, তারপর ট্যালি চিহ্ন ও শেষেরটাতে আছে মোট পছন্দ সংখ্যা।

এর পর চারটে সারিতে পর পর চারটে ফলের নাম দেওয়া আছে প্রথম স্তম্ভটায়, আর এগুলোর পাশের স্তম্ভে আছে এক একটার ট্যালি চিহ্ন ও তারপর ট্যালি চিহ্ন গুনে মোট সংখ্যাটা। সারণির নিচের শেষ সারিটা আছে এক একটা সারির সংখ্যাগুলোকে যোগ করে মোট সংখ্যাটা লেখার জন্য।

মনে রাখো, সারণির ডানদিকের শেষ স্তম্ভ বা কলাম আর নিচের শেষ সারি বা রো, এই দুটো খোপে মোট সংখ্যা লেখা হয়।

সারণির স্তম্ভ আর সারির সংখ্যা আরও বেশিও হতে পারে। এবার আমরা দেখব, আরেকটা উদাহরণ, যেখানে সারির সংখ্যা হবে মোট বারোটা।

উদাহরণ 2. ইস্কুলের চতুর্থ শ্রেণিতে শিক্ষক একদিন 10 নম্বরের অঙ্ক পরীক্ষা নিলেন। 40 জন শিক্ষার্থীর কে কত নম্বর পেল তা নিচে দেওয়া হল। একটা সারণি তৈরি করো ও বার করো, 4 নম্বরের কম কত জন পেয়েছে আর 7 নম্বরের বেশি কত জন পেয়েছে।

3	4	7	2	2	2	1	1	7	9
10	8	7	5	5	6	6	8	4	2
5	4	7	6	3	8	9	8	7	5
8	3	6	5	8	2	7	3	4	6

লক্ষ করো, আগের উদাহরণে তথ্যগুলো ছিল নানা ফলের নাম, আর এখানে তথ্যগুলো হল সংখ্যা। সারণি তৈরি করার সময় ফলের নামকে সাজিয়ে লেখার প্রয়োজন হয়নি, কারণ তার ছোট বড় হয় না।

কিন্তু সংখ্যা তো ছোট বড় হয়, তাই সারণি তৈরি করার সংখ্যাগুলো লিখে নিতে হবে ছোট থেকে বড় করে। তালিকায় দেখো সবচেয়ে কম প্রাপ্ত নম্বর হল 1 ও সবচেয়ে বেশি হল 10। তাই আমরা ট্যালি চিহ্ন দেওয়ার জন্য সারণির বাঁ দিকের স্তম্ভ বা কলামে প্রথমে দশটা সারিতে লিখে নেব পরপর 1 থেকে 10।

এরপর আগের মতোই ট্যালি চিহ্ন দিয়ে ও তার সংখ্যা গুনে আমরা সারণিটা পাব, ও সেটাকে সুন্দর করে শিরোনাম দিয়ে লিখব।

সারণি 2. বিদ্যাচর্চা কেন্দ্র: চতুর্থ শ্রেণির অঙ্ক পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের বিন্যাস

প্রাপ্ত নম্বর	ট্যালি চিহ্ন	শিক্ষার্থীর সংখ্যা
1	||	2
2	|||	3
3	||||	4
4	||||	4
5	~~||||~~ |	6
6	~~||||~~ |	6
7	~~||||~~ ||	7
8	~~||||~~	5
9	||	2
10	|	1
	মোট শিক্ষার্থী	40

এবার সারণি থেকে চট করে বলে দিতে পারবে, 4 নম্বরের কম পেয়েছে (4+3+2) বা 9 জন ও 7 নম্বরের বেশি পেয়েছে (5+2+1) বা 8 জন শিক্ষার্থী।

10.3 সংখ্যার শ্রেণি বিন্যাস

ওপরের উদাহরণে প্রাপ্ত নম্বর ছিল 1 থেকে 10-এর মধ্যে। তাই দশটা সারি করে আমরা সারণিটা তৈরি করতে পেরেছি। কিন্তু যদি পরীক্ষাটা 100 নম্বরের হত, তাহলে শিক্ষার্থীদের প্রাপ্ত নম্বর 1 থেকে 100 হতে পারত। তখন কীভাবে সারণি তৈরি করব? 1 থেকে 100 অব্দি সংখ্যার একশটা সারি করলে সে তো লম্বা হয়ে যাবে, আর সারণিটা থেকে চট করে বিশেষ কিছু বোঝাও যাবে না।

মনে রেখো, সারণি তৈরি করার উদ্দেশ্য হল, তথ্যকে এমনভাবে সাজানো যাতে তা দেখে তথ্যগুলোর মূল ছবিটা স্পষ্ট হয়। সাধারণত, সারণিতে পাঁচ থেকে দশটা সারি রাখতে পারলে সারণিটা দেখতে সুন্দর হয়, আর তথ্যগুলোর মূল ছবিটা বোঝা যায়। কোনও ক্ষেত্রে অবশ্য সারির সংখ্যা বেশি বা কম করতে হতে পারে।

উদাহরণ 3. 100 নম্বরের অঙ্ক পরীক্ষায় ইস্কুলের পঞ্চম শ্রেণির 40 জন শিক্ষার্থীর কে কত নম্বর পেল তা নিচে দেওয়া হল। একটা সারণি তৈরি করো ও বার করো, 40 নম্বরের কম কত জন পেয়েছে আর 60 নম্বরের বেশি কত জন পেয়েছে।

37	47	72	82	92	52	51	71	77	92
90	85	75	57	52	67	56	88	64	62
59	60	70	61	33	38	39	80	71	59
89	43	6	16	28	22	17	33	47	62

সারণিটা বানাতে আমরা একটা একটা করে একশটা সারিতে 1 থেকে 100 অব্দি সংখ্যা নেওয়ার বদলে 1 থেকে 100 কে কয়েকটা শ্রেণিতে ভাগ করে নেব। ধরা যাক, আমরা ঠিক করলাম সারণিতে দশটা সারি বা শ্রেণিতে রাখব। তাহলে 100 অব্দি সংখ্যাকে 10 টা শ্রেণিতে ভাগ করব। এক একটা শ্রেণিতে পড়বে (100÷10) বা 10 করে। সুতরাং, শ্রেণিগুলো হবে, 1–10, 11–20, 21–30, 31–40, 41–50 …… এইভাবে 100 পর্যন্ত।

সারণি 3. বিদ্যাচর্চা কেন্দ্র: পঞ্চম শ্রেণির অঙ্ক পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের বিন্যাস

প্রাপ্ত নম্বর	ট্যালি চিহ্ন	শিক্ষার্থীর সংখ্যা
1–10	|	1
11–20	| |	2
21–30	| |	2
31–40	~~||||~~	5
41–50	| | |	3
51–60	~~||||~~ | | |	8
61–70	~~||||~~	5
71–80	~~||||~~ |	6
81–90	~~||||~~ |	6
91–100	| |	2
	মোট শিক্ষার্থী	40

মনে রাখো: কীভাবে শ্রেণিগুলো ঠিক করবে। যে উপাত্ত বা তথ্যগুলো দেওয়া আছে তার মধ্যে খুঁজে দেখো সবচেয়ে ছোট সংখ্যা আর সবচেয়ে বড় সংখ্যা কোন্ দুটো। এই দুটো প্রান্ত সংখ্যার মধ্যে বিস্তৃত আছে বাকি সংখ্যাগুলো। বড় সংখ্যাটা থেকে ছোট সংখ্যাটা বিয়োগ করে বিয়োগফলটা মনে রাখো। এবারে ঠিক করো তুমি সারণিতে মোটামুটি কটা শ্রেণি রাখতে চাও। ওই বিয়োগফলকে এই শ্রেণির সংখ্যা দিয়ে ভাগ করো। এই ভাগফলটা হল একটা আন্দাজ — এক একটা শ্রেণির আরম্ভ আর শেষের মান দুটোর পার্থক্য মোটামুটি কত রাখতে হবে। একে বলে শ্রেণি ব্যবধান।

$$\text{শ্রেণি ব্যবধানের আন্দাজ} = \frac{(\text{সবচেয়ে বড় সংখ্যা} - \text{সবচেয়ে ছোট সংখ্যা})}{\text{শ্রেণির সংখ্যা}}$$

শ্রেণিগুলো ঠিক করার সময় এই আন্দাজটাকে একটু বেশি-কম করে নিতে হতে পারে। তাতে শ্রেণির সংখ্যাও দু-একটা কম-বেশি হয়ে যেতে পারে। আবার, হয়ত দেখা যাবে যে প্রথম শ্রেণিটা সবচেয়ে ছোট সংখ্যাটার কয়েকটা সংখ্যা আগে থেকে শুরু করলে পর পর শ্রেণিগুলো একইভাবে আসছে। এগুলো বিবেচনা করে শ্রেণিগুলো ঠিক করতে হয়।

উদাহরণ 4.

25 জন ব্যক্তির দৈনিক কত টাকা আয় হয় দেওয়া আছে। সারণি তৈরি করতে শ্রেণিগুলো কী নেবে?

290, 281, 245, 323, 324, 256, 312, 278, 265, 302,
255, 346, 282, 261, 257, 334, 269, 258, 330, 272,
295, 302, 249, 312, 286

লক্ষ করো, এখানে সবচেয়ে বড় সংখ্যা 346, আর সবচেয়ে ছোট সংখ্যা 245। সুতরাং যে 25 টা সংখ্যা দেওয়া আছে সেগুলোর বিস্তার হল (346–245) বা 101। অর্থাৎ, 101-এর মধ্যে 25 টা সংখ্যা আছে। এবারে প্রশ্ন হল, কটা শ্রেণি নেওয়া ঠিক হবে। যেহেতু সংখ্যা মাত্র 25 টা, তাই 5-6 টা শ্রেণি নেওয়াই ঠিক হবে। কারণ, এর বেশি 8-10 টা শ্রেণি নিলে এমন হতেই পারে যে কোনও কোনও শ্রেণিতে কোনও সংখ্যাই পড়ল না। সারণিতে এমনটা বাঞ্ছনীয় নয়।

সুতরাং, শ্রেণি ব্যবধান হবে মোটামুটিভাবে (101÷ 5) বা, ধরা যাক 20। আর আমরা শ্রেণিগুলো শুরু করব সবচেয়ে ছোট সংখ্যাটার কয়েকটা সংখ্যা আগে থেকে, এখানে ধরা যাক 241। তাহলে শ্রেণিগুলো হবে—

241–260, 261–280, 281–300, 301–320, 321–340, 341–360।

অনুশীলন 10.1

1. 20 জন লোকের ওজন (কেজি) দেওয়া হল। উপযুক্ত সারণি তৈরি করো।

   52, 56, 58, 60, 52, 50, 60, 58, 56, 54,
   54, 58, 56, 50, 56, 60, 58, 56, 58, 56।

   [লক্ষ করো, এখানে 50, 52, 54, 56, 58, 60, এই 6 টা সংখ্যাই বার বার এসেছে। তাই এখানে শ্রেণি করে নেওয়ার প্রয়োজন হবে না।]

2. 30 জন শিক্ষার্থীর অঙ্ক পরীক্ষায় পাওয়া নম্বর দেওয়া হল। শ্রেণি ব্যবধান 5 নিয়ে সারণি তৈরি করো।

   66, 84, 72, 73, 83, 88, 67, 68, 81, 73,
   79, 69, 67, 66, 69, 67, 65, 72, 70, 79,
   65, 81, 87, 84, 67, 73, 78, 66, 81, 75।

3. 24 জন ব্যক্তির দৈনিক কত টাকা আয় হয় দেওয়া আছে। সারণি তৈরি করো। শ্রেণি ব্যবধান 10 নিয়ে সারণি তৈরি করো।

   252, 300, 258, 260, 299, 275, 271, 278,
   254, 288, 298, 265, 268, 260, 292, 287,
   257, 267, 268, 281, 278, 271, 275, 297।

10.4 উপাত্ত বা তথ্যের শ্রেণি বিন্যাস থেকে লেখচিত্র

আমরা দেখলাম, সারণি দিয়ে অনেক অনেক তথ্যকে এমনভাবে সাজিয়ে প্রকাশ করা হয় যাতে সেগুলোর মূল চরিত্রটা বোঝা যায়। তাহলেও, বোঝার জন্য সারণিতে শ্রেণিবদ্ধ তথ্য খুঁটিয়ে দেখতে হয়। আরও সহজে, চট করে দেখেই তথ্যগুলোর মূল চরিত্রটার আন্দাজ দেওয়ার জন্য আমরা ব্যবহার করি লেখচিত্র। লেখচিত্রে তথ্যগুলোর মূল চরিত্রটা ছবি দিয়ে দেখানো হয়।

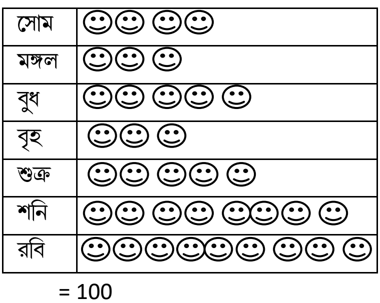
উপাত্ত বা যে তথ্যগুলো পাওয়া গেছে তা সারণি করে লেখার পরে আমরা সহজেই নানা ধরনের লেখচিত্র তৈরি করে তথ্যগুলোকে প্রকাশ করতে পারি। কত রকমের লেখচিত্র হয় সে সম্বন্ধে কিছু প্রাথমিক ধারণা আলোচনা করব ও কয়েকটি লেখচিত্রগুলো আঁকার পদ্ধতি মোটামুটি জেনে রাখব। পরবর্তীকালে আমরা লেখচিত্রগুলো আঁকার পদ্ধতি বিস্তারিতভাবে শিখব।

নানা ধরনের লেখচিত্র হয়—**চিত্রলেখ** বা পিক্টোগ্রাফ (Pictograp), **রেখাচিত্র** বা লাইন ডায়াগ্রাম (Line Diagram), **স্তম্ভচিত্র** বা বার গ্রাফ (Bar Graph)।

এছাড়া চতুর্থ ধরনটা হল, **বৃত্তলেখ** বা পাই চার্ট (Pi Chart), যা ব্যবহার হয় তথ্যকে শতকরা অংশে একটা বৃত্তের ভাগ হিসাবে দেখাতে। এটা আমরা পরে শিখব। প্রথমে আমরা দেখে নিই এই লেখচিত্রগুলো কেমন দেখতে হয়।

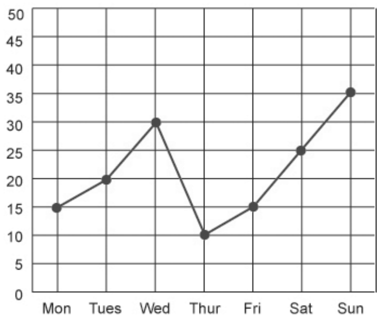
চিত্রলেখ

এক সপ্তাহে মেলাতে কতজন লোক এসেছে



রেখাচিত্র

এক সপ্তাহে কত কিলো আলু বিক্রি হয়েছে



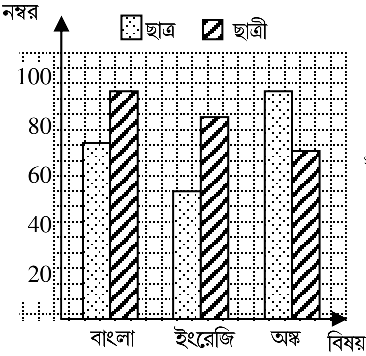
চিত্রলেখে আমরা সংখ্যার বদলে চিহ্ন ব্যবহার করি। ওপরে এক একটা ☺ চিহ্নের সংখ্যা ধরেছি 100 জন, ও এক একটা দিনের সংখ্যা বোঝাতে সেই অনুযায়ী চিহ্ন বসিয়েছি। রেখাচিত্রে উল্লম্ব রেখায় কেজি নিয়েছি, এক একটা ঘরকে 5 কেজি করে। সমান্তরাল রেখায় দিনগুলো লিখে, এক একটা দিনের সংখ্যাকে বিন্দু দিয়ে চিহ্নিত করেছি ও তারপর সেগুলোকে রেখা টেনে যুক্ত করেছি।

উল্লম্ব স্তম্ভচিত্রে আমরা সংখ্যাটা বোঝাই এক একটা স্তম্ভের উচ্চতা দিয়ে। স্তম্ভগুলো সমান চওড়া করে আঁকি ও তাদের মধ্যে সমান ফাক রাখি। কতটা চওড়া করা হবে ও কতটা ফাক রাখা হবে, তা ঠিক করে নিতে হয় মোট কটা স্তম্ভ হবে সেই অনুযায়ী, যাতে দেখতে সুন্দর হয়। **অনুভূমিক স্তম্ভচিত্রে** আমরা উল্লম্ব স্তম্ভচিত্রকে উল্টে নিই। মনে রেখো, প্রথমেই আমাদের দুটো সরলরেখা টেনে নিতে হয়, একটা উল্লম্ব ও অন্যটা সমান্তরাল করে। এই দুটো রেখাকে বলে উল্লম্ব অক্ষ (ইংরেজিতে ভারটিকাল অ্যাক্সিস) ও সমান্তরাল অক্ষ (হরিজন্টাল অ্যাক্সিস)।

রেখাচিত্র ও স্তম্ভচিত্র আঁকতে কাগজে সমান করে চৌকো ঘর কেটে নিতে হয়, বা গ্রাফ পেপার ব্যবহার করা যায়। সংখ্যাগুলো কেমন ও কত থেকে কত পর্যন্ত আছে সেই হিসাব করে এক একটা ঘরের সংখ্যা স্থির করে নিতে হয়।

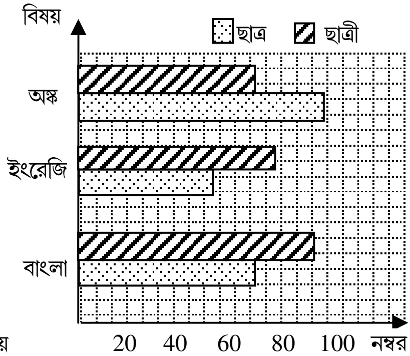
স্তম্ভচিত্র (উল্লম্ব)

পরীক্ষায় ছাত্র ও ছাত্রীদের গড় নম্বর

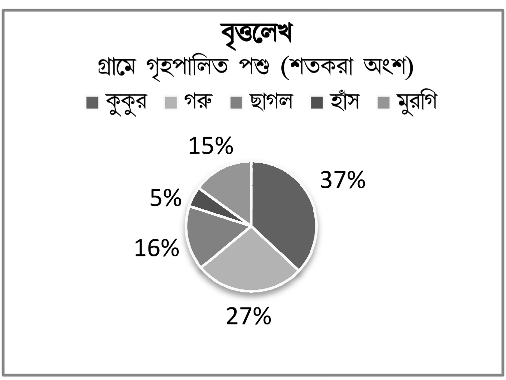


স্তম্ভচিত্র (অনুভূমিক)

পরীক্ষায় ছাত্র ও ছাত্রীদের গড় নম্বর



বিশেষ ক্ষেত্রে মোটামুটিভাবে সংখ্যা বোঝানো ছাড়া চিত্রলেখ তেমন ব্যবহার হয় না। রেখাচিত্র সাধারণত ব্যবহার হয় কোনওকিছুর ক্রমাগত সংখ্যাগত বৃদ্ধি বা হ্রাস সময়ের প্রেক্ষিতে কেমন হয়েছে তা দেখাতে। স্তম্ভচিত্র ব্যবহার করা হয় একটা বা একাধিক বিষয়ের সংখ্যাগত তুলনা করতে। সাধারণত উল্লম্ব স্তম্ভচিত্রই অধিক ব্যবহার হয়। ক্ষেত্রবিশেষে অনুভূমিক স্তম্ভচিত্র ব্যবহার করা যেতে পারে।



শতকরায় দেওয়া তথ্যকে আমরা বৃত্তলেখ এঁকে দেখাই। জ্যামিতি থেকে শিখবে কীভাবে কোণ আঁকতে হয় চাঁদা ব্যবহার করে, ও জানবে যে বৃত্তে থাকে 360 ডিগ্রী কোণ। আমরা হিসাব করব, শতাংশে দেওয়া সংখ্যা গুলো 360-য়ের মধ্যে কত হবে। সেই হিসাবে আমরা কোণ এঁকে বৃত্তটাকে বিভিন্ন অংশে ভাগ করে দেখাই। বৃত্তলেখ আঁকা শিখবে প্রাথমিক জ্যামিতি শেখার পরে।